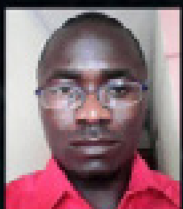
Editorial Académica Universitaria

Guía de exercícios para o desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas é uma investigação que se sustenta em teorias relacionadas com a resolução de problemas contextualizados. Nela se ofrecem algumas perspectivas como devem ser eleborados os problemas, assim como a resolução de alguns problemas contextualizados de Física da 12ª classe. Propomos também exercícios para o trabalho independente dos professores e estudantes para o sedenvolvimento de habilidades na resolução de problemas contextualizados. A nossa visão neste manual é munir os professores com habilidades de modelar os exercícios tendo em conta a contextualização do processo de ensino e aprendizagem. A obra inclui recomendações para os professores e estudantes acerca de como potenciar o desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas.



MSc. José Luis Sabonete Calulo

Licenciado e Pós graduado em Matemática, pós graduado em redação científica e publicação de alto impacto, Mestre em Didáctica do Ensino Superior e Doutorando em Ciências Pedagógicas. Professor de Matemática e Física na Escola do II Ciclo do Ensino Secundário "Comandante Vilinga" no Huambo –Angola. Investiga e publica sobre Didáctica da Matemática, Física Geral e sobre rendimento escolar.

ISBN: 978-959-7225-10-2

EDACUN

EDITORIAL ACADÉMICA UNIVERSITARIA

José Luis Sabonete Calulo

Editorial Académica Universitaria

Editorial Académica Universitaria

FÍSICA

décima segunda classe

Guia de exercícios para o desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas

MSc. José Luís Sabonete Calulo

FÍSICA
décima segunda classe

Guia de exercícios para o desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas

EDACUN

Las Tunas, 2015

Diseño y Edición: Ing. Erik Marino Santos Pérez. P.I.
Corrección: Dr. C. Hilda de la C. Argüelles Mancebo. P.T.
Dirección General: Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo. P.T.

ISBN: 978-959-7225-10-2
Editorial Académica Universitaria (Edacun)
Universidad “Vladimir Ilich Lenin”
Ave. Carlos J. Finlay s/n
Código Postal 75100
Las Tunas, 2015

EDACUN

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus Pai dador de todos bens, nosso consolador e protector das nossas vidas. Todavia, agradeço Á DIRECÇÃO DA ESCOLA DO SEGUNDO CICLO DO ENSINO SECUNDÁRIO "Comandante Vilinga" no Huambo –Angola; sem a vossa colaboração esta obra nunca seria possivel.

De forma geral para toda minha família, cologas e amigos que directa ou indirectamente fizeram com que esta obra fosse uma realidade. E com você que está lendo este livro me sinto profundamente honrado.

José Luis Sabonete Calulo

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

A Física como disciplina da área das ciências exactas se ensina em Angola desde o principio da Colonha Portuguesa, se ensinava de um modo puramente teórico, centrada no instrutivo, onde o aluno assumía um papel passivo no processo de ensino - aprendizagem. O ensino em geral era eclesiástico, pois o governo colonial não se ocupava com esta tarefa. Como os alunos que erão permitidos a assistir as aulas não tinham todas as condições, a aplicação dos conhecimetos e o desenvolvimento de habilidades por eles era muito pobre, quase nula, a aprendizagem era memorística o aluno se limitava a repetir de memoria passos descritos pelo professor.

A aprendizagem de Física no II Ciclo do Ensino Secundário em Angola tem como objectivo, ampliar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no I ciclo de modo que o aluno possa compreender a evolução dos meios tecnológicos e sua relação dinâmica com a evolução do conhecimento científico.

Segundo Calulo e Mestre (2013), “(...) os programas de Física concebidos para o II ciclo, necessitam de uma restruração atendendo o objectivo da discilplina no ciclo para que ofereça aos alunos os elementos essênciais do quadro físico do mundo para que possam ser capazes de desenvolver a sua identidade como indivíduos criativos, sociais e possuidores de atitudes,hábitos, habilidades e conhecimentos úteis a si mesmo e à sociedade e para a continuação com os estudos”.

A vontade de actualizar o programa, assim como, a superação do corpo docente é uma das grandes preocupações do colectivo. Porque há tematicas complexas que exigem por parte do professor conhecimentos relacionados com a prática e é o professor, que não domina a prática. É importante que a definição do objectivo do ciclo esteja em correspondência com as condições materiais e humanas das escolas.

Neste ciclo de ensino, o aluno terá contacto pela primeira vez com alguns elementos da Física Moderna. Assim sendo, o aluno deve ter uma visão clara da aplicabilidade dos fenómenos relacionados com a Física Moderna, para que estes não fiquem apenas na esfera teórica, mas que ele veja que ela está presente no seu quotidiano. Por isso, é necessário que o corpo docente saiba contextualizar os conteúdos.

Em este sentido, para que os alunos tenham a necessidade de resolver problemas, é determinante que nas classes anteriores se proporcione o desenvolvimento de habilidades e o emprego de métodos activos de ensino.

A análise do processo de ensino e aprendizagem dos estudantes permitiu detectar limitações que se manifestam na falta de domínio e profundidade das habilidades na resolução de problemas. Assim, quando falamos de domínio e profundidade de uma habilidade, nos referimos a sua sistematização.

As insuficiências constatadas nos níveis de desempenho na resolução de problemas de Física dos alunos da 12ª classe indicem negativamente no seu rendimiento académico. A insuficiente sistematização na formação de habilidades na resolução de problemas é um negativo e complexo fenómeno em que os elementos de carácter didáctico

e metodológico resultam básicos, já que de estes depende, em grande medida, a possibilidade de solucionar essas dificuldades.

Para favorecer o aproveimento da resolução de problemas de Física, para atinguir o desenvolvimento de habilidades e capacidades cognoscitivas, se precisa do aperfeiçoamento da modelação dos problemas que se apresentam nos estudiantes, em correspondência com as habilidades que se pretendem formar e o emprego de métodos activos de ensino.

Resolução de problemas como metodologia do ensino de Física

O homem desde os primórdios da história teve sempre necessidade de resolver problemas, mas foi somente na década de 1980 que se começou a discutir as perspectivas didáctico-pedagógicas da resolução de problemas. A partir desse momento, ela passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar Física.

Para Onuchic (2008), “(...) a resolução de problemas, como uma metodologia de ensino, se torna o lema das pesquisas e estudos nos anos 1990”. Essa nova visão de ensino - aprendizagem apoia especialmente os estudos desenvolvidos pelo National Council of Teachers of Publishing Standards 2000, Principles and Standards in School Mathematics (ONUCHIC, 2008).

Nessa perspectiva, o ponto de partida é um problema que vai nos conduzir até a construção do conhecimento. O problema é olhado como um elemento que pode conduzir o processo de construção do conhecimento. O ensino está centrado no aluno, que constrói os conceitos físicos durante a resolução de um problema, sendo esses, em um segundo momento, formalizados pelo professor. "(...) o processo de ensino - aprendizagem pode, assim ser desenvolvido através de desafios e problemas interessantes que podem ser explorados e não apenas resolvidos de forma mecânica". (DE ARAÚJO, 2014).

A resolução de problemas é uma estratégia que visa desenvolver o raciocínio e motivar os alunos. Essa metodologia de ensino vai possibilitar aos alunos desenvolver o raciocínio matemático, enfrentar situações novas, dando a eles a oportunidade de reconhecerem as aplicações da Física no quotidiano, tornando a aula de Física mais interessante e desafiadora.

Para que se cumpram eficazmente os objectivos traçados na maioria dos currículos e programas escolares actuais, o plano de estudo de Física deve proporcionar oportunidades nas quais os estudantes enfrentem problemas que os interessem e os desafiem, possibilitando-lhes resolver os problemas futuros, que enfrentarão na vida profissional e pessoal.

A actividade de resolver problemas é essencial, se queremos conseguir uma aprendizagem significativa da Física. "Nesse sentido, a resolução de problemas tem sido enfatizada mundialmente como um recurso metodológico para proporcionar um aprendizado de Física de melhor qualidade. Acredita-se, e algumas pesquisas têm dado suporte a essa crença, que

a construção de conceitos físicos pelos alunos se torna mais significativo e duradouro quando é proporcionado por meio de situações caracterizadas pela investigação e exploração de novos conceitos e que estimulem a curiosidade do educando" (D'AMBROSIO, 1984, LOPES, 2012).

Para Onuchic (1999), "(...) o principal (...) interesse em trabalhar o ensino - aprendizagem de Física através da resolução de problemas baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática" .

Segundo Almeida (2014), "(...) ensinar a resolver problemas exige do professor um preparo maior do que para ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos". Resolução de exercícios e resolução de problemas são metodológias bem diferentes. Na resolução de exercícios, o professor actua como orientador dando instruções, passo a passo, para que seus alunos atinjam de forma directa a solução, por meio de acções mecânicas. Já na resolução de problemas isso não acontece, pois o professor actua como incentivador e moderador das ideias dos próprios alunos, cujas hipóteses devem ser levantadas e testadas.

Para ilustrar melhor essa diferença apresentamos o quadro abaixo organizado por Boriasco (1995), citado por Secon (2009) e Duli (2014).

Esquema de diferença entre aula na tendência tradicional e na tendência de resolução de problemas:

Esquema de aula na tendência tradicional	**Esquema de aula na tendência de resolução de problemas**
O professor explica a matéria (teoria).	O professor apresenta um problema escolhido por ele (s) ou pelo(s) aluno (s).
O professor mostra exemplos.	Os alunos tentam resolver o problema com conhecimentos que possuem.
O professor propõe "exercícios" semelhantes aos exemplos dados para que os alunos resolvam.	Quando os alunos encontram algum obstáculo (falta de algum conteúdo necessário, para a resolução do problema), o professor apresenta, de alguma forma, esse conteúdo.
O professor (ou um aluno) resolve no quadro os exercícios.	Resolvido o problema, os alunos discutem sua solução; se necessário, com a ajuda do professor. Essa discussão envolve todos os aspectos da resolução do problema, inclusive os do conteúdo necessário.
O professor propõe aos alunos outros "exercícios" já não tão semelhantes aos exemplos que ele resolveu.	O professor apresenta outro problema escolhido por ele ou pelo(s) aluno(s)

O professor (ou um aluno) resolve os exercícios no quadro. O professor propõe "problemas", se for o caso, ou mais "exercícios".	
O professor começa outro assunto.	

Percebe-se claramente a diferença entre o papel do professor e do aluno na tendência tradicional e na tendência de resolução de problema. Na tendência de resolução de problema, o problema é ponto de partida e orientação para aprendizagem e a construção de novo conhecimento faz-se presente através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo na sala de aula.

A resolução de problemas é uma metodologia que propõe uma organização que é inversa à sequência que se trabalha, usualmente, em sala de aula, nas Escolas do II Ciclo do Ensino Secundário em Angola.

A organização da aula, segue a sequência da tendência tradicional, como apresentado no quadro acima.

A resolução de problema não seria uma perspectiva de ensino nova para o ensino de Física em Angola, porque já se faz referência a ela nos documentos oficiais do Ministério da Educação de Angola, porém o que foi observado nos revelou que ela ainda não é encontrada nas salas de aula.

No emprego dessa metodologia, para que se motive os alunos, é necessáro que os problemas tenham elementos próximos do quotidiano deles, isso quer dizer que eles devem ser contextualizados. Mas o que é um problema contextualizado em Física? O que é a contextualização?

Contextualização: importância e tipos de contextualização

No sentido de aprofundar mais sobre o conceito de contextualização, averiguou-se o que os dicionários da Língua Portuguesa e pesquisadores dizem acerca do mesmo.

Segundo Tufano (2001), "(...) contextualizar é o acto de colocar no contexto. No latim contextu, é colocar alguém a par de algo, alguma coisa, uma acção premeditada para situar um indivíduo em um lugar no tempo e no espaço desejado, encadear ideias em escrito, constituir o texto no seu todo, argumentar".

Para Spinelli (2011), contexto é "um conjunto de circunstâncias capazes de estimularem relações entre significados conceituais. A viabilização desta acção ocorre, principalmente quando essas circunstâncias, a partir dos elementos, podem ser associadas à cultura dos sujeitos envolvidos".

Para a Física, contextualizar, segundo Pavanello (2004), citado por Santos (et-al) (2014), "(...) é apresentar o conteúdo por meio de uma situação problematizada".

Vasconcelos (2008), considera que "contextualizar é apresentar na sala de aula situações que dão

sentido aos conhecimentos que desejamos que sejam aprendidos, por meio da problematização, resgatando os conhecimentos prévios e a informação que os alunos trazem, criando, dessa forma, um contexto que dará significado ao conteúdo, isto é, que os conduza a sua compreensão".

Ao resolver um problema contextualizado, o aluno dota de significado as práticas físicas realizadas e compreende a sua finalidade, contribuindo para desenvolver a sua criatividade. Esses problemas permitem conexões entre diversos conceitos físicos e entre diferentes formas de pensamento matemático. Segundo Marangon (2002), "(...) se o conteúdo trabalhado tiver relação com a vida do educando, o êxito será maior". Para isso é preciso, como diz Dellagnelo, "(...) construir uma ponte entre o mundo real, isto é, o das sociedades modernas em constante transformação, e o mundo da escola, que tem diante de si a tarefa de formar os cidadãos".

A questão da contextualização tem sido muito discutida no ensino de Física, um dos motivos é que essa matéria é vista, por grande parte dos alunos, como uma disciplina sem qualquer aplicação prática devido ao seu elevado nível de abstração. Isso acontece, em grande parte, por causa da maneira como se tem levado a cabo o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina.

A questão necessária para melhor ensinar Física "(...) deve ser encontrada num contexto socio-cultural, procurando situar o aluno no ambiente de que ele é parte, dando-lhe instrumento para ser um indivíduo actuante e guiado pelo movimento socio-cultural que está vivendo”. (D´Ambrósio,1986, apud DE Almeida, 2014)

Em Física, a contextualização é um instrumento bastante útil, porque permite levar o aluno a reflectir a partir de certo conjunto ou sistema de conhecimento e colocá-lo em prática de modo a resolver problemas do seu quotidiano. Também serve de ponte que preenche o vazio entre os conteúdos físicos e a sua aplicação prática na realidade do aluno.

Além da contextualização no quotidiano que é a mais defendida, porém pouco usada na sala de aula, existem outros tipos de contextualização. Spineli (2011) destaca outros três tipos: na história de Física, na interdisciplinaridade e na intradisciplinaridade.

Aplicações do quotidiano respondem às inquietações dos alunos e professores sobre a importância que a Física tem e a sua relação directa com o quotidiano. Trata-se, portanto, de utilizar o conhecimento de Física como ferramenta, para além de explicar o porquê disso ou aquilo, interpretando todo o evento, reconfigurando-o, quando necessário, a fim de permitir o estabelecimento de maior gama de relações conceituais.

Contextualizar na Interdisciplinaridade trata-se de fazer a ligação dos conhecimentos de Física com os demais conceitos das disciplinas da grade curricular. Já a intradisciplinaridade são contextos que estabelecem a ligação de um determinado conteúdo com os outros campos dentro da própria Física. Estudar Física com base em contexto, composto a

partir da história da Física, representa ressignificar elementos da época do surgimento do conceito, especialmente os culturais, com objectivos de produzir sequências de actividades que aproximem as condições históricas da realidade actual do estudante.

De maneira muito próxima, Vieira (2004), destaca três tipos de contextualização: Contextualização socio-cultural, Contextualização histórica, Contextualização interna à disciplina de Física.

Em relação à contextualização socio-cultural, a autora assinala a presença de aspectos sociais referentes a situações do quotidiano do aluno, situações que envolvem manifestações culturais locais, informações de outros campos do conhecimento e preocupações universais.

Dentro dessa categoria vão se destacar três subcategorias. As situações do quotidiano: problemas e conhecimento prévio, abordagens interdisciplinares, preocupações universais ou temas transversais. A Física aparece como instrumento para a solução de problemas do quotidiano. Muitas vezes, mobilizam-se conhecimentos construídos fora da escola pela necessidade da vida individual ou social. As abordagens interdisciplinares acontecem nas actividades de Física nas quais o aluno é chamado a lidar com informações de outras disciplinas.

As preocupações “universais” aparecem nos livros em situações que envolvem questões que fazem parte do contexto mundial, principalmente, conceitos relacionados aos temas transversais, ou seja, Ética, Pluralidade Cultural, Saúde, Meio Ambiente, etc.

As situações reconhecidas como contextualização histórica mostram uma tentativa de situar o conhecimento para o aluno, dizendo o porquê de tal conteúdo e como foi criado, esclarecendo a origem e o desenvolvimento de algumas ideias e revelando alguns de seus personagens. A contextualização interna à disciplina de Física se constitui das situações em que os autores utilizam recursos e articulações, dentro da própria Física, para favorecer a construção do conhecimento.

Por sua vez Skovsmose (2008) afirma que, "(...) resolver exercícios com referência a uma semirrealidade é uma competência muito complexa e é baseada num contrato bem especificado entre professor e alunos".

Desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas

Para o desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas de Física nos alunos da 12ª classe, segundo a concepção dos autores Calulo e Mestre (2014), "(...) o ponto de partida do procedimento é a estruturação da disciplina de Física em termos de objectivos e conteúdos, assim como a estruturação da disciplina em unidades didácticas desenvolvedoras que constituem células organizativas do processo de ensino - aprendizagem, em cada uma das quais se prevé a formação de determinadas habilidades de aplicação. Logo de estabelecer as habilidades que se pretendem desenvolver em cada unidade, é necessário projectar a sua estrutura funcional".

Projectar a estrutura funcional de uma habilidade consiste em:

1. Decompor a habilidade em suas operações constituintes, com o requisito de que cada uma delas tenha uma identidade própria, que precise em cada momento a acção que o estudante deve realizar.

2. Prever as tarefas mediante as quais se cumprem as operações, de forma tal que orientem o estudante na execução de cada operação.

3. Organizar o proceso de ensino - aprendizagem a nível de unidade didáctica, de manera que o objecto ou objectos sobre os quais actúa a disciplina se enriqueça, aumentando gradualmente o seu nível de profundidade e propiciando um incremento no nível de assimilação do sujeito.

No processo de assimilação de uma habilidade se establecem etapas caracterizadas por um grau de independência cada vez maior do estudante em relação ao professor, a medida que o conteúdo de estudo se torna mais rico, até o límite estabelecido polo grau de profundidade declarado no objectivo da unidade didáctica, o qual determina as características do denominado problema próprio. Este constitui uma generalização dos problemas docentes, em ele se generaliza a complexidade do conteúdo da unidade, em conhecimentos e habilidades; também em ele se generaliza o método de resolução, (U. Mestre, 1996).

Em cada temática se produz um incremento quantitativo da complexidade do conteúdo de estudo, já que o número de tarefas que o estudante deve cumprir para executar cada operação vai aumentando até cumprir as exigencias do problema próprio.

O processo de sistematização de uma habilidade, em geral, não termina em uma temática dada, se não que ao ser retomada em uma temática posterior, onde o objecto de estudo se transformou, até sofrer um cambio qualitativo; se repete um processo similar, a partir do nível de sistematização precedente, transitándo-se por estados de complicação paulatina do objecto em um processo de assimilação que leva o estudante a um novo e mais elevado nível de sistematização. De este modo, na integração de temáticas da disciplina de Física da 12ª clase se pode lograr a formação de habilidades com um alto nível de sistematização, que chegam a contribuir na formação dos modos de actuação do professional.

É conveniente destacar que só com o enfrentamento de situações novas não se garante os níveis de domínio desejados, por isso, se requer de um processo posterior de exercitação, ao lango do qual se fazem mais precisas e menos complexas as operações. Assim, com a exercitação de certo tipo de problema se alcança um determinado nível de domínio, que é transferido durante o enfrentamento de uma nova situação, mais complexa que a anterior e, portanto, resulta insuficiente para resolve-la. No processo de exercitação existirá sempre um mínimo de tarefas imprescindiveis para realizar a operação, o que constitui o nível de sistematização básico.

Ao concluir com uma temática se deve atingir um determinado nível de sistematização da habilidade de aplicação, ao tornar o conteúdo todo complexo que se previa no objectivo e ter logrado sua assimilação, por parte do estudante.

A estrutura funcional de uma habilidade representa para o estudante uma estratégia para a construção consciente do seu conhecimento e para o professor constitui um recurso para guiar e controlar o processo de formação e desenvolvimento de uma habilidade.

O modelo da estrutura funcional constitui um punto de partida para a determinação das operações básicas que formam a habilidade e a delimitação dos níveis de sistematização. A estrutura da família de problemas para um tema, segundo nossa visão, pode começar com um problema elementar, a partir do qual se estruturam, de forma lógica e ascendente, o resto dos problemas do sistema.

Cada novo problema (com suas variantes) aportará algum elemento novo que enriqueça o objecto de estudo e o método de solução, que dé maior carácter de essência ao objecto, acercando gradualmente o estudante ao conhecimento mais profundo e geral do fenómeno estudado e posibilitando, ao mesmo tempo, a integração dos conteúdos, toda vez que para a sua solução se necessite da aplicação de conteúdos já assimilados.

Segundo a concepção dos autores Calulo e Mestre (2014), a proposta didáctica dos problemas que se apresentam nos estudantes para o desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas deve apresentar a seguiente estrutura organizativa:

1. **Problemas de primeiro tipo**: constituem situações particulares muito simples, com um minimo grau de complexidade e riqueza no objecto, com as quais o estudante se familiariza aplicando o método de solução com ajuda do professor.

2. **Problemas de segundo tipo:** constituem situações conhecidas com variantes, de um maior grau de complexidade no objecto, dada pela introdução de novos elementos e condições e diante as quais o estudante é obrigado, a não actuar só reproductivamente, se não com um certo grau de produtividade.

3. **Problemas de terceiro tipo**: constituem situações com um máximo grau de complexidade no objecto, a través das quais se generaliza o método de trabalho empregado e que permitem, uma vez realizadas polo estudante, controlar o grau de dominio e profundidade alcançado na habilidade que preside no tema.

O sistema de exercícios que se propõe corresponde com a estructura adotada do modelo sistémico-estructural-funcional para o desenvolvimento de habilidades a través da resolução de problemas.

Por este sistema realizamos as siguientes recomendações para uma organização mais eficiente do processo docente:

- Reduzir o tempo dedicado a exposição de conteúdos teóricos e incrementar o tempo dedicado a exercitação e actividades práticas.
- Modificar os actuais métodos de ensino, com os quais só se ensinam procedimentos racionais para a resolução de problemas.
- Alterar a concepção actual de algumas formas de docência que não incentivam a participação activa dos estudantes.

Problemas do primeiro tipo

1-Sejam $x(t)$ e $y(t)$ as coordenadas no sistema SI, de uma partícula material que se desloca no plano Oxy:

$$x(t) = 1{,}0t\,(SI) \qquad\qquad y(t) = 2{,}0t^2 + 4{,}0 \quad SI$$

1.1-Indica a lei do movimento da partícula.

Determine para $t = 2{,}0s$.

1.2- Componentes do vector de posição:

Resolução

1.1– A equação que traduz a lei do movimento é:

$$\vec{r} = x\vec{i}_x + y\vec{i}_y$$

Substituindo os valores temos:

$$\vec{r} = 1{,}0x\vec{i}_x + (2{,}0t^2 + 4{,}0)\vec{i}_y \qquad (S.I)$$

1.2 . $\vec{r} = 1{,}0t\vec{i}_x + (2{,}0t^2 + 4{,}0)\vec{i}_y \qquad (S.I)$

Para $t = 2{,}0s$ temos:

$\vec{r} = 2{,}0\vec{i}_x + 12{,}0\vec{i}_y$ **sabendo que**

$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y$ **Assim temos:** $\vec{r}_x = x\vec{i}_x$ e $y = y\vec{i}_y$

As coordenadas de $\vec{r}$ são:

$$\vec{r}_x = 2{,}0\vec{i}_x\,(m) \qquad\qquad \vec{r}_y = 12{,}0\vec{i}_y\,(m)$$

2- Sabendo que as coordenadas de uma partícula material no plano Oxyz são:

$$\begin{cases} x = 2{,}0t^2 - 3{,}0t \\ y = 2{,}0t^2 + 1{,}0 \qquad (S.I) \\ z = 1 \end{cases}$$

Determine:

2.1 – O vector de posição da partícula no instante t.

2.2 – A norma do deslocamento da partícula entre $t = 1{,}0s$ e $t = 3{,}0s$

2.3 – A velocidade média da partícula no intervalo $[1{,}0; 3{,}0]s$.

Resolução

Dados

$x = 2{,}0t^2 - 3{,}0t$

$y = 2{,}0t^2 + 1{,}0$

$z = 1{,}0$

$\Delta t = [1{,}0; 3{,}0]s$

$\vec{r} = ?$

$\|\Delta\vec{r}_z\| = ?$

$\vec{v}_m = ?$

Fórmula

2.1 $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

Substituindo temos:

$\vec{r} = (2{,}0t^2 - 3{,}0t)\vec{e}_x + (2{,}0t^2 + 1{,}0)\vec{e}_y + 1{,}0\vec{e}_z$ esta é a expressão do vector posição.

2.2 $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{e}_x + \Delta y\vec{e}_y + \Delta z\vec{e}_z$ onde

$\Delta x = x_3 - x_1$; $\Delta y = y_3 - y_1$; $\Delta z = z_3 - z_1$; Para calcularmos a norma do deslocamento é necessário calcular primeiro $\Delta\vec{r}$

$$\Delta\vec{r} = (x_3 - x_1)\vec{e}_x + (y_3 - y_1)\vec{e}_y + (z_3 - z_1)\vec{e}_z$$

Para tempo igual a $1s$ temos:

$$\begin{cases} x_1 = 2{,}0.1 - 3{,}0.1 \\ y_1 = 2{,}0.1^2 + 1{,}0 \\ z_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2{,}0 - 3{,}0 \\ y_1 = 2{,}0 + 1{,}0 \\ z_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1{,}0\,m \\ y_1 = 3{,}0\,m \\ z_1 = 1\,m \end{cases}$$

Para $t = 3{,}0\,s$ temos:

$$\begin{cases} x_3 = 2{,}0.3{,}0 - 3{,}0.3{,}0 \\ y_3 = 2{,}0.3^2 + 1{,}0 \\ z_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 6{,}0 - 9{,}0 \\ y_3 = 2{,}0.9 + 1{,}0 \\ z_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_3 = 9{,}0\,m \\ y_3 = 19\,m \\ z_3 = 1\,m \end{cases}$$

Assim, $\Delta\vec{r}$ vem:

$$\Delta\vec{r} = (9 - (-1))\vec{e}_x + (19 - 3)\vec{e}_y + (1 - 1)\vec{e}_z$$

$$\Delta\vec{r} = 10\vec{e}_x + 16\vec{e}_y + 0\vec{e}_z \Leftrightarrow \Delta\vec{r} = 10\vec{e}_x + 16\vec{e}_y \quad (m)$$

$\Delta x = 10\,m \qquad \Delta y = 16{,}0\,m$

R: A norma do deslocamento é de $18,9\,m$.

2.3 $\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

$\vec{v}_m = \frac{10\vec{e}_x+16\vec{e}_y}{3,0-1,0} \leftrightarrow \vec{v}_m = \frac{10\vec{e}_x+16\vec{e}_y}{2,0} \leftrightarrow \vec{v}_m = 5\vec{e}_x + 8\vec{e}_y \;\; m/s$

R: A velocidade média é de $5\vec{e}_x + 8\vec{e}_y \;\; m/s$

3-Uma particula material, que se desloca ao longo do plano OXY, apresenta a seguinte lei das velocidades: $\vec{V} = 2,0\vec{e}_x + 6,0t\vec{e}_y$ (S.I)

Determine:

3.1- As coordenadas de posição da partícula, no instante $t = 1s$ sabendo que, no instante inicial se encontram num ponto de coordenadas, $x = 1,0m$ e $y = 1,0m$.

3.2- A aceleração média da particula entre os instantes $t = 1s$ e $t = 2s$.

3.3- A lei das acelerações do movimentodo da partícula.

Resolução

Dados

$x = 1,0m$

$y = 1,0m$

Dados

$x = 1,0m$

$y = 1,0m$

$\vec{V} = 2,0\,\vec{e}_x + 6,0t\vec{e}_y$

$\Delta t = [1,0;\, 2,0]s$

$\vec{a}_m = ?$

$\vec{a} = ?$

3.1 – Para determinar as coordenadas de posição da partícula, no instante $t = 1,0s$, temos que começar por calcular o vector posição, $\vec{r}$ no instante t.

Se para $t = 0s$ é $x = 1,0m$ e $y = 1,0m$ e atendendo que $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ pela operação inversa da derivação, podemos concluir que:

$\vec{r} = (1,0 + 2,0t)\vec{e}_x + (1,0 + 3,0t^2)\vec{e}_y$ (S.I).

As coordenadas de posição da partícula, no instante $t = 1,0s$, são portanto:

$\vec{r} = (1,0 + 2,0)\vec{e}_x + (1,0 + 3,0)\vec{e}_y \Leftrightarrow \vec{r} = 3,0\vec{e}_x + 4,0\vec{e}_y$

$\vec{r} = (1,0 + 2,0.1,0)\vec{e}_x + (1,0 + 3,0.1,0^2)\vec{e}_y$

$x = 3,0m$ e $y = 4,0m$

As coordenadas de posição da partícula, no instante $t = 1{,}0s$ são respectivamente: $x = 3{,}0m$ e $y = 4{,}0m$

3.2

$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$ Pela lei das velocidades temos $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$

$\vec{v}_1 = 2{,}0\vec{e}_x + 6{,}0.1{,}0\vec{e}_y \Leftrightarrow \vec{v}_1 = 2{,}0\vec{e}_x + 6{,}0\vec{e}_y$ (m/s)

$\vec{v}_2 = 2{,}0\vec{e}_x + 6{,}0.2{,}0\vec{e}_y \Leftrightarrow \vec{v}_2 = 2{,}0\vec{e}_x + 12{,}0\vec{e}_y$ (m/s)

Então: $\vec{a}_m = \frac{2{,}0\vec{e}_x + 12{,}0\vec{e}_y - (2{,}0\vec{e}_x + 6{,}0\vec{e}_y)}{2{,}0 - 1{,}0}$

$$\vec{a}_m = \frac{2{,}0\vec{e}_x + 12{,}0\vec{e}_y - 2{,}0\vec{e}_x - 6{,}0\vec{e}_y)}{1{,}0} \Leftrightarrow$$
$$\frac{2{,}0\vec{e}_x - 2{,}0\vec{e}_x + 12{,}0\vec{e}_y - 6{,}0\vec{e}_y}{1{,}0} \Leftrightarrow 6{,}0\vec{e}_y m/s^2$$

R: A aceleração média da partícula entre os instantes t=1,0s e t=2,0 é de $6{,}0m/s^2$.

3.3- A lei das acelerações do movimento da partícula obtem-se derivando em ordem ao tempo, a expressão da lei da velocidade.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}_x}{dt} + \frac{d\vec{v}_y}{dt}$$
$$\frac{d\vec{v}_x}{dt} = \frac{d(2{,}0)}{dt} = 0$$
$$\frac{d\vec{v}_y}{dt} = \frac{d(6{,}0t)}{dt} = 6{,}0$$
$$\vec{a} = 6{,}0\vec{e}_y m.s^{-2}$$

R: A lei das acelerações do movimentodo da partícula é igual a $6{,}0\vec{e}_y\ m.s^{-2}$.

4- Uma pedra é lançada horizontalmente, de uma falésia (costa marítima) que se encontra a uma altura de 60m acima do nível do mar, com velocidade inicial $\vec{v}_0 = 30\vec{e}_x$ (m/s).

Considere desprezível a resistência do ar e $g = 10m/s^2$.

Para o instante de tempo $t = 1{,}0s$ determine:

4.1 – A posição da pedra.

4.2 – A velocidade da pedra.

Resolução

Dados

$\vec{v}_0 = 30\vec{e}_x$ (m/s)

$y_0 = h = 60m$

$g = \frac{10m}{s^2}$

$t = 1,0s$

$\vec{r} = ?$

$\vec{v} = ?$

4.1 A posição da pedra é dada pela lei das posições:

$$\vec{r} = V_0 t\vec{e}_x + \left(y_0 - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{e}_y$$

$$\vec{r} = 30t\vec{e}_x + \left(60 - \frac{1}{2}10t^2\right)\vec{e}_y$$

$\vec{r} = 30t\vec{e}_x + \left(60 - 5t^2\right)\vec{e}_y$ Para t=1,0s temos:

$\vec{r} = 30\vec{e}_x + 55\vec{e}_y$ esta é posição da pedra para t=1s

4.2 – Como $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ logo, $\vec{v} = \frac{d}{dt}[30t\vec{e}_x + (60 - 5t^2)\vec{e}_y]$

$\vec{v} = 30\vec{e}_x - 10t\vec{e}_y \ m/s$ esta é a velocidade da pedra para este instante t e para t = 1s $\vec{v} = 30\vec{e}_x - 10\vec{e}_y \ m/s$

5- Considere um projectil lançado obliquamente a partir do solo, segundo um ângulo de lançamento de 30^0. Sabendo que o valor da velocidade inicial é de $10,0m/s$ e considerando gravidade igual a $9,8m/s^2$. Determine:

5.1 – O alcance horizontal do projéctil;

5.2 – A altura máxima atingida.

Resolução

Dados	Fórmula e substituição
$V_0 = 10m/s$	5.1 $X_{max} = \frac{V_0^2 sen(2\theta)}{g}$
$\theta = 30^0$	$X_{max} = \frac{10^2 . sen(2.30^0)}{9,8}$
$g = 9,8m/s^2$	$X_{max} = \frac{100 . 0,9}{9,8}$
$X_{max} = ?$	$X_{max} = \frac{90}{9,8} = 9,2 \ m$
$h_{max} = ?$	$X_{max} = 9,2 \ m$

R: O alcance horizontal do projéctil é igual a $9,2m$

5.2

$$h_{max} = \frac{(V_0 sen\theta)^2}{2g}$$

$$h_{max} = \frac{(10 sen 30^0)^2}{2 . 9,8} = \frac{(10 . 0,5)^2}{19,6} = \frac{5,0^2}{19,6} = \frac{25}{19,6} = 1,3m$$

R: A altura máxima atingida pelo projéctil é igual a $1,3m$.

6- Duas viaturas A e B,deslocam-se em rodovias rectilines e paralelas com velocidades constante e normas $|\vec{v}_A| = 10m/s$ e $|\vec{v}_B| = 15m/s$, respectivamente.

6.1-Determine a velocidade da viatura B relativamente a viatura A, $V_{B/A}$, quando: Se movem no mesmo sentido.

Resolução

Dados

$\|\vec{V}_A\| = 10m/s$

$\|\vec{V}_B\| = 15m/s$

$\vec{V}_{B/A} = ?$

Como as duas viaturas, A e B, se deslocam com velocidade constante, relativamente às rodovias podem ser consideradas deferenciais inerciais.

$\vec{V}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ Considerando a direcção do eixo dos xx do referêncial coincidente com a direcção das rodovias e o sentido positivo o sentido do movimento das duas viaturas, teremos:

$\vec{V}_A = 10,0\vec{u}_x m/s$
$\vec{V}_B = 15\vec{u}_x m/s$

$\vec{V}_{B/A} = (15-10)\vec{u}_x \Leftrightarrow \vec{V}_{B/A} = 5\vec{u}_x m/s$

R: A velocidade da viatura B relativamente a viatura A, é igual a $5\vec{u}_x m/s$.

Problemas de segundo tipo

7- Um corpo material desloca-se ao longo de um plano Oxy, sendo as coordenadas:

$x(t) = 3,0t$ (S.I); $y(t) = 4t^2 + 6$ (S.I)

7.1 – Indique a lei do movimento do corpo.

Determine para $t = 4,0s$;

7.2 – As componentes do vector posição $\vec{r}$

7.3 – A distância do corpo à origem do referencial

Resolução

Dados

$x(t) = 3,0t$

$y(t) = 4,0t^2 + 6$

$t = 4,0s$

$\vec{r} = ?$

$\vec{r}_x = ?$

$\vec{r}_y = ?$

$d = \|\vec{r}\| = ?$

Fórmula

7.1-$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$

Substituição

$\vec{r} = 3,0t\vec{u}_x + (4,0t^2 + 6)\vec{u}_y$ esta é a expressão do vector posição.

Para $t = 4,0s$

7.2 $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y$ onde $\vec{r}_x = x\vec{u}_x$ e $\vec{r}_y = y\vec{u}_y$

$\vec{r} = 12\vec{u}_x + 70\vec{u}_y \quad (m)$

Logo $\vec{r}_x = 12\vec{u}_x\ m$ e $\vec{r}_y = 70\vec{u}_y\ m$

7.3 $d = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$d = \sqrt{12^2 + 70^2} = \sqrt{144 + 4900} = \sqrt{5044}$

$d = 71m$

R: A distância do corpo à origem do referencial é igual a $71m$.

8- Sabe-se que as coordenadas de uma partícula material em movimento no plano $Oxyz$ são:

$$\begin{cases} x = t^3 - 2{,}0 \\ y = t^2 + 1{,}0 \\ z = 2{,}0 \end{cases} \qquad (S.I)$$

Determine:

8.1 – O vector de posição da partícula no instante t.

8.2 – A norma do deslocamento da partícula entre $t = 1{,}0s$ e $t = 2{,}0s$

8.3 – A velocidade média da partícula no intervalo $[1{,}0;\ 2{,}0]s$.

8.4 – A velocidade da partícula no instante t

Resolução

Dados

$x = t^2 - 2{,}0$

$y = t^2 + 1{,}0$

$z = 2{,}0$

$\Delta t = [1{,}0;\ 2{,}0]s$

$\vec{r} = ?$

$\|\Delta\vec{r}_s\| = ?$

$\vec{v}_m = ?$

$\vec{v} = ?$

Fórmula

8.1 $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

Substituindo temos:

$\vec{r} = (t^3 - 2{,}0)\vec{u}_x + (t^2 + 1{,}0)\vec{u}_y + 2{,}0\vec{u}_z$ esta é a expressão do vector posição no instante t.

8.2 – $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{u}_x + \Delta y\vec{u}_y + \Delta z\vec{u}_z$ onde

$\Delta x = x_2 - x_1;\quad \Delta y = y_2 - y_1;\quad \Delta z = z_2 - z_1;$

Para calcularmos a norma do deslocamento é necessário calcular primeiro $\Delta\vec{r}$

$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{u}_x + (y_2 - y_1)\vec{u}_y + (z_2 - z_1)\vec{u}_z$

Para tempo igual a $1,0s$ temos:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2 \\ y_1 = 1,0 + 1,0 \\ z_1 = 2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1,0 \\ y_1 = 2 \\ z_1 = 2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1,0\,m \\ y_1 = 2,0\,m \\ z_1 = 2\,m \end{cases}$$

Para $t = 2,0\,s$ temos:

$$\begin{cases} x_2 = 2^2 - 2,0 \\ y_2 = 2^2 + 1,0 \\ z_2 = 2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 4,0 - 2,0 \\ y_2 = 4,0 + 1,0 \\ z_2 = 2 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = 2,0\,m \\ y_2 = 5,0\,m \\ z_2 = 2,0\,m \end{cases}$$

Assim, $\Delta\vec{r}$ vem:

$$\Delta\vec{r} = (2 - (-1))\vec{e}_x + (5 - 2)\vec{e}_y + (2 - 2)\vec{e}_z$$

$$\Delta\vec{r} = 3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 0\vec{e}_z \leftrightarrow \Delta\vec{r} = 3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y \quad (m)$$

$$\Delta x = 3\,m \qquad \Delta y = 3\,m$$

$$\|\Delta\vec{r}\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 4,2\,m$$

R: A norma do deslocamento é de $4,2m$.

8.3 $\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

$$\vec{v}_m = \frac{3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y}{2,0 - 1,0} \leftrightarrow \vec{v}_m = \frac{3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y}{1,0} \leftrightarrow \vec{v}_m = 3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y \quad m/s$$

R: A velocidade média da partícula no intervalo $[1,0; 2,0]s$ é igual a $3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$ m/s.

8.4 – A velocidade da particula no instante t obtém-se derivando, em ordem ao tempo o vector posição:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \leftrightarrow \vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(t^2 - 2,0)}{dt} = 2,0t - 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(t^2 + 1,0)}{dt} = 2,0t + 0$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d(2,0)}{dt} = 0$$

Então: $\vec{v} = 2t\vec{e}_x + 2t\vec{e}_y + 0\vec{e}_z$

$\vec{v} = 2t\vec{e}_x + 2t\vec{e}_y$ (S.I) Esta é a expressão da velocidade no instante t.

9-Sabendo que a lei das velocidades uma partícula material, que se desloca ao longo do plano OXY, é : $\vec{V} = 4,0\vec{e}_x + 8,0\vec{e}_y$ (S.I)

Determine:

9.1- As coordenadas de posição da partícula, no instante $t = 2,0s$ sabendo que, no instante inicial se encontram num ponto de coordenadas, $x = 2,0m$ e $y = 2,0m$.

9.2- A aceleração média da partícula entre os instantes $t = 2,0s$ e $t = 3,0s$.

9.3- A lei das acelerações do movimentodo da partícula.

9.4-A amplitude do ângulo entre as direcções da $\vec{v}$ e da $\vec{a}$, no instante $t = 2,0s$.

Resolução

Dados

$x = 2{,}0m$

$y = 2{,}0m$.

$\vec{V} = 4{,}0\,\vec{e}_x + 8{,}0t\vec{e}_y$

$\Delta t = [2{,}0; 3{,}0]s$

$\vec{a}_m = ?$
$\vec{a} = ?$

$\theta = ?$

9.1– Para determinar as coordenadas de posição da partícula, no instante $t = 2{,}0s$, temos de começar por calcular o vector posição $\vec{r}$ no instante t.

Se para $t = 0s$ é $x = 2{,}0m$ e $y = 2{,}0m$ e atendendo que $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ pela operação inversa da derivação, podemos concluir que:

$\vec{r} = (2{,}0 + 4{,}0t)\vec{e}_x + (2{,}0 + 4{,}0t^2)\vec{e}_y$ (SI).

As coordenadas de posição da partícula, no instante $t = 2{,}0s$ são portanto:

$\vec{r} = (2{,}0 + 4{,}0.2{,}0)\vec{e}_x + (2{,}0 + 4{,}0.2{,}0^2)\vec{e}_y$

$\vec{r} = (2{,}0 + 8{,}0)\vec{e}_x + (2{,}0 + 16{,}0)\vec{e}_y \Leftrightarrow \vec{r} = 10{,}0\vec{e}_x + 18{,}0\vec{e}_y$

$x = 10{,}0m$ e $y = 18{,}0m$

As coordenadas de posição da partícula, no instante $t = 2{,}0s$ são respectivamente: $x = 10{,}0m$ e $y = 18{,}0m$.

9.2

$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$ Pela lei das velocidades temos $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$

$\vec{v}_2 = 4{,}0\vec{e}_x + 8{,}0.2{,}0\vec{e}_y \Leftrightarrow \vec{v}_2 = 4{,}0\vec{e}_x + 16{,}0\vec{e}_y$ (m/s)

$\vec{v}_3 = 4{,}0\vec{e}_x + 8{,}0.3{,}0\vec{e}_y \Leftrightarrow \vec{v}_3 = 4{,}0\vec{e}_x + 24{,}0\vec{e}_y$ (m/s)

Então: $\vec{a}_m = \frac{4{,}0\vec{e}_x + 24{,}0\vec{e}_y - (4{,}0\vec{e}_x + 16{,}0\vec{e}_y)}{3{,}0 - 2{,}0}$

$\vec{a}_m = \frac{4{,}0\vec{e}_x + 24{,}0\vec{e}_y - 4{,}0\vec{e}_x - 16{,}0\vec{e}_y)}{1{,}0} \Leftrightarrow$

$\frac{4{,}0\vec{e}_x - 4{,}0\vec{e}_x + 24{,}0\vec{e}_y - 16{,}0\vec{e}_y}{1{,}0} \Leftrightarrow 8{,}0\vec{e}_y m/s^2$

R: A aceleração média da partícula entre os instantes $t = 2{,}0s$ e $t = 3{,}0s$ é de $8{,}0m/s^2$.

9.3- A lei das acelerações do movimento da partícula obtem-se derivando em ordem ao tempo, a expressão da lei da velocidade.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}_x}{dt} + \frac{d\vec{v}_y}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}_x}{dt} = \frac{d(4,0)}{dt} = 0$$

$$\frac{d\vec{v}_y}{dt} = \frac{d(8,0t)}{dt} = 8,0$$

$$\vec{a} = 8,0\vec{e}_y m s^{-2}$$

R: A lei das acelerações do movimentodo da partícula é igual a $8,0\,\vec{e}_y\, m s^{-2}$.

9.4- Para calcularmos o ângulo formado entre, as direcções da $\vec{v}$ e da $\vec{a}$, recorre-se ao produto escalar de dois vectores.

$$\vec{v}.\vec{a} = \|\vec{v}\|.\|\vec{a}\|.\cos\theta$$

$$\vec{v}.\vec{a} = v_x.a_x + v_y.a_y$$

assim temos: $v_x.a_x + v_y.a_y = \|\vec{v}\|\|\vec{a}\|.\cos\theta$

No instante $t = 2,0s$ velocidade é $\vec{v}_2 = 4,0\vec{e}_x + 16,0\vec{e}_y$ m/s

$\vec{a} = 8,0\,\vec{e}_y\, m s^{-2}$; $v_x = 4,0 m/s$ $v_y = 16 m/s$ sendo $a_x = 0 m/s^2$ e $a_y = 8,0 m/s^2$

As normas de $\vec{v}$ e $\vec{a}$ no instante $t=2,0s$ são respectivamente:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Leftrightarrow \sqrt{4^2 + 16^2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{16 + 256} \Leftrightarrow \sqrt{272}$$

$$\|\vec{v}\| = 16,5 m/s$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \Leftrightarrow \sqrt{0 + 8,0^2} = 8,0 m/s^2$$

Substituindo os valores respectivos na equação: $v_x.a_x + v_y.a_y = \|\vec{v}\|\|\vec{a}\|\cos\theta$ temos:

$$4,0 \cdot 0 + 16 \cdot 8,0 = 16,5 \cdot 8,0 \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{16.8,0}{16,5.8,0} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{16}{16,5} \Leftrightarrow \cos\theta = 0,97$$

$$\theta = 14^{\circ}$$

R: A amplitude do ângulo entre as direcções da $\vec{v}$ e da $\vec{a}$, no instante $t = 2,0s$ é igual a 14°.

10– Uma bola é lançada horizontalmente, de um edifício que se encontra a uma altura de 70m a nível do solo, com velocidade inicial $40\vec{e}_x$ m/s.

Considerando $g = 10m/s^2$ e $t = 2,0s$, determine:

10.1 – A posição da bola;

10.2 – A velocidade da bola;

10.3 – O tempo de queda (tempo de voo).

Resolução

Dados | Fórmula

$\vec{V}_0 = 40\vec{u}_x\ m/s$ 10.1 $\vec{r} = V_0 t\vec{u}_x + \left(y_0 - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{u}_y$

$y_0 = h = 70m$ $\vec{r} = 40t\vec{u}_x + \left(70 - \frac{1}{2}10t^2\right)\vec{u}_y$

$g = 10m/s^2$ $\vec{r} = 40t\vec{u}_x + (70 - 5t^2)\vec{u}_y$

$t = 2{,}0s$ Para $t = 2{,}0\ s$ temos:

$\vec{r} = ?$ $\vec{r} = 80\vec{u}_x + (70 - 20)\vec{u}_y$

$\vec{V} = ?$ $\vec{r} = 80\vec{u}_x + 50\vec{u}_y\ \ m$

$t = ?$

10.2 – $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$\vec{V} = \frac{d}{dt}[40t\vec{u}_x + (70 - 5t^2)\vec{u}_y]$

$\vec{V} = 40\vec{u}_x - 10t\vec{u}_y\ m/s$ Para $t = 2{,}0\ s$

$\vec{V} = 40\vec{u}_x - 20\vec{u}_y$

10.3 – Recordemos a equação paramétrica do movimento de um projéctil segundo o eixo dos yy, $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$, e atendendo a que $y = 0m$ quando a bola atinge o solo, temos:

$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$

$0 = 70 - \frac{1}{2}10t^2 \leftrightarrow 0 = 70 - 5t^2 \leftrightarrow -70 = -5t^2 \leftrightarrow 70 = 5t^2 \leftrightarrow$

$t^2 = \frac{70}{5} \leftrightarrow t^2 = 14 \leftrightarrow t = \sqrt{14} \leftrightarrow t = 3{,}7s$

R: O tempo de bola é de $3{,}7s$.

11– Uma laranja é lançada obliquamente a partir do solo, segundo um ângulo de lançamento de 45^0. O valor da velocidade inicial é de $30m/s$ e considere gravidade igual a $10m/s^2$. Determine:

11.1 – O alcance horizontal da laranja;

11.2 – A altura máxima atingida;

11.3 – A posição da laranja decorrido $\frac{1}{2}$ do tempo de voo.

Resolução

Dados

$\theta = 45^0$

$V_0 = 30m/s$

$g = 10m/s^2$

$X_{máx} = ?$

$h_{máx} = ?$

$\vec{r} = ?$

Fórmula

11.1 $X_{máx} = \frac{V_0^2 sen(2\theta)}{g}$

$$X_{máx} = \frac{30^2 .\ sen(2 . 45^0)}{10}$$

$$X_{máx} = \frac{900 .\ sen 90^0}{10}$$

$$X_{máx} = \frac{900 . 1}{10} \leftrightarrow X_{máx} = 90\ m$$

R: O alcance horizontal da laranja é de $90m$.

11.2 $h_{máx} = \frac{(V_0 sin\theta)^2}{2g}$

$$h_{máx} = \frac{(30 \sin 45\ )^2}{2.10} = \frac{(30 . 0,7)^2}{20} = \frac{21^2}{20} = \frac{441}{20} = 22m$$

R: A altura máxima atingida pela laranja é de $22m$.

11.3 – Comecemos por calcular o tempo de voo. Este é dado pela expressão:

$$t = \frac{2V_0 sen\theta}{g} \leftrightarrow t = \frac{2 . 30\ \ sen 45}{10} \leftrightarrow t = \frac{60 . 0,7}{10} = \frac{42}{10} = 4,2s \text{ (tempo de voo)}$$

A posição da laranja que é pedida é para um instante t_1 tal que

$t_1 = \frac{1}{2} t$. logo,

$$t_1 = \frac{1}{2} . 4,2 \leftrightarrow t_1 = \frac{4,2}{2} = 2,1s$$

A posição da laranja é dada pela lei do movimento.

$$\vec{r} = V_0 cos\theta t \vec{u}_x + \left(V_0 sen\theta t - \frac{1}{2} g t^2\right) \vec{u}_y$$

Fazendo as substituições necessárias, vem para $t = 2,1s$:

$$\vec{r} = 30 cos 45\ \ \times 2,1 \vec{u}_x + \left[30 . sen 45\ \ \times 2,1 - \frac{1}{2} . 10 . (2,1)^2\right] \vec{u}_y$$

$$\vec{r} = 63 . cos 45\ \ \vec{u}_x + [63 . sen 45\ \ - 5 \times 4,41] \vec{u}_y$$

$$\vec{r} = 63 \times 0,7 \vec{u}_x + [63\ \times 0,7 - 22,1] \vec{u}_y$$

$$\vec{r} = 44,1 \vec{u}_x + [44,1 - 22,1] \vec{u}_y$$

$$\vec{r} = 44 \vec{u}_x + 22 \vec{u}_y\ \ (m)$$

R: A posição da laranja decorrido $\frac{1}{2}$ do tempo de voo é $\vec{r} = 44 \vec{u}_x + 22 \vec{u}_y\ (m)$.

12-Dois comboios D e N, deslocam-se em vias-férreas rectilíneas e paralelas as velocidades constantes de normas $|\vec{v}_D| = 10m/s$ e $|\vec{v}_N| = 15m/s$, respectivamente.

12.1-Determine a velocidade do comboio N relativamente ao comboio D, $V_{N/D}$, quando: se movem em sentidos contrários.

Resolução

Dados

$\left\|\vec{V}_D\right\| = 10m/s$

$\left\|\vec{V}_N\right\| = 15m/s$

$\vec{V}_{N/D} = ?$

Como não é referido qual dos dois comboios se move no sentido negativo,podemos considerar que o comboio N desloca-se no sentido positivo e D no sentido negativo.

$\vec{V}_D = -10{,}0\vec{a}_x m/s$

$\vec{V}_N = 15\vec{a}_x m/s$

$\vec{V}_{N/D} = (15-(-10))\vec{a}_x \Leftrightarrow \vec{V}_{B/A} = 25\vec{a}_x m/s$

R: A velocidade do comboio N relactivamente ao comboio D quando se movem em sentidos contrarios, é igual a $25\vec{a}_x m/s$.

Problemas de terceiro tipo

13- O movimento de uma particula é caracterizado pelas equações paramétricas:

$x = t + 2 \ (S.I)$ $y = t^2 + 1 \ (S.I)$ $z = 2m$

Determine:

13.1 A lei do movimento da particula;

13.2 As componentes do vector posição para t = 2,0s

13.3 A distância para o mesmo intervalo de tempo.

13.4 Indique a equação cartesiana da trajectória da particula.

Resolução

Dados

$x = t + 2 \quad (S.I)$

$y = t^2 + 1 \quad (S.I)$

$z = 2m$

$\vec{r} = ?$

$\vec{r}_x = ?$

$\vec{r}_y = ?$

$\vec{r}_z = ?$

$\|\vec{r}\| = ?$

$y = ?$

Fórmula

13.1 $\vec{r} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z$

Substituição

$\vec r = (t+2)\vec u_x + (t^2+1)\vec u_y + 2\vec u_z$ esta é a expressão que traduz a lei do movimento.

13.2 $\vec r = \vec r_x + \vec r_y + \vec r_z$ para $t = 2$ temos:

$\vec r = (2+2)\vec u_x + (4+1)\vec u_y + 2\vec u_z$

$\vec r = 4\vec u_x + 5\vec u_y + 2\vec u_z$

Logo $\vec r_x = 4\vec u_x$; $\quad \vec r_y = 5\vec u_y \quad \vec r_z = 2\vec u_z$

13.3 $\|\vec r\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\|\vec r\| = \sqrt{4^2+5^2+2^2} = \sqrt{16+25+4}$

$\|\vec r\| = \sqrt{45} = 6{,}7\ m$

R: A distância do corpo à origem do referencial é igual a $6{,}7m$.

13.4 $\begin{cases} x = t+2 \\ y = t^2+1 \\ z = 2 \end{cases}$ Isolando t na I equação temos: $\begin{cases} t = x-2 \\ y = t^2+1 \\ z = 2 \end{cases}$

Substituindo $t = x-2$ na II Equação temos:

$y = (x-2)^2+1$

$y = x^2-4x+4+1$

$y = x^2-4x+5$

R: A equação cartesiana da trajectória da partícula é $y = x^2-4x+5$.

14- Sabe-se que as coordenadas de uma partícula material em movimento no plano $Oxyz$ são: $\begin{cases} x = 2t^2 - 4{,}0t \\ y = t^2 + 2{,}0 \\ z = 3{,}0 \end{cases}$

Determine:

14.1 – O valor de posição da partícula no instante t.

14.2 – A norma do deslocamento da partícula entre $t = 1{,}0s$ e $t = 2{,}0s$

14.3 – A velocidade média da partícula no intervalo $[1{,}0; 2{,}0]s$.

14.4 – A velocidade da partícula no instante t

14.5 – A norma do vector velocidade para o instante $t = 1{,}0s$

Resolução

Dados

$x = 2{,}0t^2 - 4{,}0t$

$y = t^2 + 2{,}0$

$z = 3{,}0$

$\Delta t = [1{,}0; 2{,}0]s$

$\vec r = ?$

$\|\Delta \vec r_x\| = ?$

$\vec v_m = ?$

$\vec{v} = ?$

$\|\vec{v}\| = ?$

Fórmula

14.1 – $\vec{r} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z$

Substituindo temos:

$\vec{r} = (2{,}0t^2 - 4{,}0t)\vec{a}_x + (t^2 + 2{,}0)\vec{a}_y + 3{,}0\vec{a}_z$ esta é expressão do vector posição no istante t.

14.2 – $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{a}_x + \Delta y\vec{a}_y + \Delta z\vec{a}_z$ onde

$\Delta x = x_2 - x_1;\quad \Delta y = y_2 - y_1;\quad \Delta z = z_2 - z_1;$

Para calculamos a norma do deslocamento

é necessário calcular primeiro $\Delta\vec{r}$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{a}_x + (y_2 - y_1)\vec{a}_y + (z_2 - z_1)\vec{a}_z$$

Para tempo igual a $1s$ temos:

$$\begin{cases} x_1 = 2{,}0.1 - 4{,}0.1 \\ y_1 = 1^2 + 2{,}0 \\ z_1 = 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2{,}0 - 4{,}0 \\ y_1 = 1{,}0 + 2{,}0 \\ z_1 = 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2{,}0 \\ y_1 = 3{,}0\ m \\ z_1 = 3{,}0\ m \end{cases}$$

Para $t = 2{,}0\ s$ temos:

$$\begin{cases} x_2 = 2{,}0.2^2 - 4{,}0.2{,}0 \\ y_2 = 2^2 + 2{,}0 \\ z_2 = 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 8{,}0 - 8{,}0 \\ y_2 = 4 + 2{,}0 \\ z_2 = 3 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = 0\ m \\ y_2 = 6{,}0\ m \\ z_2 = 3{,}0\ m \end{cases}$$

Assim, $\Delta\vec{r}$ vem:

$$\Delta\vec{r} = (0 - (-2))\vec{a}_x + (6 - 3)\vec{a}_y + (3 - 3)\vec{a}_z$$

$$\Delta\vec{r} = 2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y + 0\vec{a}_z \leftrightarrow \Delta\vec{r} = 2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y \quad (m)$$

$\Delta x = 2\ m \qquad \Delta y = 3\ m$

$$\|\Delta\vec{r}\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{12} = 3{,}5m$$

R: A norma do deslocamento é de $3{,}5m$.

14.3 $\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

$$\vec{v}_m = \frac{2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y}{2{,}0 - 1{,}0} \leftrightarrow \vec{v}_m = \frac{2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y}{1{,}0} \leftrightarrow \vec{v}_m = 2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y \quad m/s$$

R: A velocidade média da particula no instante t é de $2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y\ \ m/s$

14.4 - $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \leftrightarrow \vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{a}_x + \frac{dy}{dt}\vec{a}_y + \frac{dz}{dt}\vec{a}_z$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(2{,}0t^2 - 4{,}0t)}{dt} = 4{,}0t - 4{,}0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(t^2 + 2{,}0)}{dt} = 2{,}0t$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d(3{,}0)}{dt} = 0$$

Então: $\vec{v} = (4{,}0t - 4{,}0)\vec{a}_x + 2{,}0t\vec{a}_y + 0\vec{a}_z$

$$\vec{v} = (4{,}0t - 4{,}0)\vec{a}_x + 2{,}0t\vec{a}_y \qquad (S.I)$$

R: A velocidade da partícula no instante t é igual a $(4{,}0t - 4{,}0)\vec{a}_x + 2{,}0t\vec{a}_y$.

14.5- A norma do vector velocidade da partícula no instante $t = 2,0s$ obtém-se substituindo em $\vec{v}$, t por $2s$

$$\vec{v} = (4,0.2 - 4)\vec{u}_x + 2,0.2\vec{u}_y$$

$$\vec{v} = (8 - 4)\vec{u}_x + 4,0\vec{u}_y$$

$$\vec{v} = 4\vec{u}_x + 4,0\vec{u}_y$$

A sua norma é dada por

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 5,7\ m/s$$

R: A Velocidade da partícula no instante $t = 2,0s$ é igual a $5,7\frac{m}{s}$.

15- Dada a lei das velocidades $\vec{V} = 2,0t\vec{u}_x + 4,0t\vec{u}_y$ de uma partícula material, que se desloca ao longo do plano OXY. Determine:

15.1- As coordenadas de posição da partícula, no instante $t = 1,0s$ sabendo que, no instante inicial se encontram, num ponto de coordenadas, $x = 1,0m$ e $y = 1,0m$.

15.2- A aceleração média da partícula entre os instantes $t = 1,0s$ e $t = 2,0s$.

15.3- A lei das acelerações do movimentodo da partícula.

15.4-A amplitude do ângulo entre as direcções da $\vec{v}$ e da $\vec{a}$, no instante $t = 1,0s$.

Resolução

Dados

$x = 1,0m$

$y = 1,0m$

$\vec{V} = 2,0t\,\vec{u}_x + 4,0t\vec{u}_y$

$\Delta t = [1,0; 2,0]s$

$\vec{a}_m = ?$

$\vec{a} = ?$

$\theta = ?$

15.1– Para determinar as coordenadas de posição da partícula, no instante $t = 1,0s$, temos de começar por calcular o vector posição, $\vec{r}$ no instante t.

Se para $t = 0s$ é $x = 1,0m$ e $y = 1,0m$ e atendendo que $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ pela operação inversa da derivação podemos concluir que:

$$\vec{r} = (1,0 + t^2)\vec{u}_x + (1,0 + 2,0t^2)\vec{u}_y \quad (SI).$$

As coordenadas de posição da partícula, no instante $t = 1{,}0s$ são portanto:

$$\vec{r} = (1{,}0 + 1{,}0)\vec{e}_x + (1{,}0 + 2{,}0.1{,}0^2)\vec{e}_y$$

$$\vec{r} = 2{,}0\vec{e}_x + (1{,}0 + 2{,}0)\vec{e}_y \Leftrightarrow \vec{r} = 2{,}0\vec{e}_x + 3{,}0\vec{e}_y$$

$x = 2{,}0m$ e $y = 3{,}0m$

As coordenadas de posição da partícula, no instante $t = 1{,}0s$ são respectivamente: $x = 2{,}0m$ e $y = 3{,}0m$.

15.2- $\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$ Pela lei das velocidades temos: $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_1 = 2{,}0.1{,}0\vec{e}_x + 4{,}0.1{,}0\vec{e}_y \Leftrightarrow \vec{v}_1 = 2{,}0\vec{e}_x + 4{,}0\vec{e}_y \quad \text{(m/s)}$$

$$\vec{v}_2 = 2{,}0.2{,}0\vec{e}_x + 4{,}0.2{,}0\vec{e}_y \Leftrightarrow \vec{v}_2 = 4{,}0\vec{e}_x + 8{,}0\vec{e}_y \quad \text{(m/s)}$$

Então: $\vec{a}_m = \dfrac{4{,}0\vec{e}_x + 8{,}0\vec{e}_y - (2{,}0\vec{e}_x + 4{,}0\vec{e}_y)}{2{,}0 - 1{,}0}$

$$\vec{a}_m = \frac{4{,}0\vec{e}_x + 8{,}0\vec{e}_y - 2{,}0\vec{e}_x - 4{,}0\vec{e}_y)}{1{,}0} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4{,}0\vec{e}_x - 2{,}0\vec{e}_x + 8{,}0\vec{e}_y - 4{,}0\vec{e}_y}{1{,}0} \Leftrightarrow$$

$$\vec{a}_m = 2{,}0\vec{e}_x + 4{,}0\vec{e}_y\,(m/s^2)$$

R: A aceleração média da partícula entre os instantes $t = 1{,}0s$ e $t = 2{,}0s$ é de $2{,}0\vec{e}_x + 4{,}0\vec{e}_y\,(m/s^2)$

15.3- A lei das acelerações do movimento da partícula obtém-se derivando em ordem ao tempo, a expressão da lei da velocidade.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}_x}{dt} + \frac{d\vec{v}_y}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}_x}{dt} = \frac{d(2{,}0t)}{dt} = 2{,}0$$

$$\frac{d\vec{v}_y}{dt} = \frac{d(4{,}0t)}{dt} = 4{,}0$$

$$\vec{a} = 2{,}0\vec{e}_x + 4{,}0\vec{e}_y\,(m.s^{-2})$$

R: A lei das acelerações do movimentodo da partícula é igual a $2{,}0\vec{e}_x + 4{,}0\vec{e}_y\,(m/s^2)$.

15.4-Para calcularmos o ângulo formado entre, as direcções da $\vec{v}$ e da $\vec{a}$, recorre-se ao produto escalar de dois vectores.

$$\vec{v}.\vec{a} = \|\vec{v}\|.\|\vec{a}\|.\cos\theta$$

$$\vec{v}.\vec{a} = v_x.a_x + v_y.a_y$$

assim temos: $v_x.a_x + v_y.a_y = \|\vec{v}\|.\|\vec{a}\|.\cos\theta$

No instante t=1,0s a velocidadae é $\vec{v} = 2{,}0\vec{e}_x + 4{,}0\vec{e}_y$ m/s

$v_x = 2{,}0m/s$ $v_y = 4m/s$ sendo $\vec{a} = 2{,}0\vec{e}_x + 4{,}0\vec{e}_y$ $m.s^{-2}$; $a_x = 2{,}0m/s^2$ e $a_y = 4{,}0m/s^2$

As normas de $\vec{v}$ e $\vec{a}$ no instante $t = 1{,}0s$ serão respectivamente:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Leftrightarrow \sqrt{2^2 + 4^2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4+16} \Leftrightarrow \sqrt{20}$$

$$\|\vec{v}\| = 4{,}5m/s$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \Leftrightarrow \sqrt{2{,}0^2 + 4{,}0^2} = 4{,}5m/s^2$$

Substituindo os valores respectivos na equação: $v_x.a_x + v_y.a_y = \|\vec{v}\|\|\vec{a}\|.\cos\theta$ temos:

$$2{,}0 \cdot 2{,}0 + 4{,}0.4{,}0 = 4{,}5 \cdot 5{,}0 \cdot \cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{20}{20{,}25}$$

$$\cos\theta = 0{,}99$$

$$\theta = 8^\circ$$

R: A amplitude do ângulo entre as direcções da $\vec{v}$ e da $\vec{a}$, no instante $t = 1{,}0s$ é igual a 8°.

16 – O Joaquim encontra- se na varanda do edifício da escola que se encontra a $75m$ de altura relativamente ao solo e lança uma esfera com velocidade inicial de $45\vec{e}_x(m/s)$.

Considerando desprezável a resistência do ar, gravidade igual a $10m/s^2$ e $t = 1{,}0s$. Determine:

16.1 – A posição da esfera;

16.2 – A velocidade da esfera;

16.3 – O tempo de queda da esfera (tempo de voo);

16.4 – A distância entre o ponto de impacto da esfera no solo e a vertical da posição de lançamento (alcance de lançamento).

Dados

$\vec{v}_0 = 45\vec{e}_x$ m/s

$h = y_0 = 75m$

$g = 10m/s^2$

$t = 1{,}0s$

$\vec{r} = ?$

$\vec{v} = ?$

$t = ?$

$x = ?$

Fórmula e substituição

16.1- $\vec{r} = \vec{v}_0 t\vec{e}_x + \left(y_0 - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{e}_y$

$$\vec{r} = 45t\vec{e}_x + \left(75 - \frac{1}{2}10t^2\right)\vec{e}_y$$

$$\vec{r} = 45t\vec{e}_x + (75 - 5t^2)\vec{e}_y$$

Para $t = 1{,}0\ s$ temos:

$\vec{r} = 45\vec{a}_x + 70\vec{a}_y$

R: Esta e expressão da posição da esfera

16.2 – $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$\vec{V} = \frac{d}{dt}[45t\vec{a}_x + (75 - 5t^2)\vec{a}_y]$

$\vec{V} = 45\vec{a}_x - 10t\vec{a}_y\ m/s$ Para $t = 1{,}0\ s$

$\vec{V} = 45\vec{a}_x - 10\vec{a}_y\ m/s$

16.3 - $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$

$0 = 75 - \frac{1}{2}10t^2 \leftrightarrow 0 = 75 - 5t^2 \leftrightarrow 5t^2 \leftrightarrow 75 \leftrightarrow t^2 = \frac{75}{5} \leftrightarrow$
$t^2 = 15 \leftrightarrow t = \sqrt{15} \leftrightarrow t = 3{,}9s$

R: O tempo de queda da esfera é de $3{,}9s$

16.4 – A distância entre o ponto de impacto da esfera no solo e a vertical da posição de lançamento obtém-se ,substituindo o tempo de voo, que neste caso corresponde ao tempo de queda da esfera, na equação paramétrica do movimento da esfera, segundo o eixo dos xx, $x = V_0t$, já que $x_0 = 0m$.

$x = x_0 + V_0t$

$x = 45.3{,}9$

$x = 175{,}5m$

$x = 1{,}76.10^2m$

R: A distância entre o ponto de impacto da esfera no solo e a vertical da posição de lançamento é de $1{,}76.10^2m$.

17 – Uma bola é lançada obliquamente a partir do solo, segundo um ângulo de lançamento de 30^0. Sabendo que o valor da velocidade inicial é de $50m/s$, e considerando $g = \frac{10m}{s^2}$. Determine:

17.1 – O alcance horizontal da bola;

17.2 – A altura máxima atingida;

17.3 – A posição da bola decorrido $\frac{1}{4}$ do tempo de voo;

17.4 – O ângulo θ que a direcção da velocidade da bola forma com a direcção horizontal, no instante em que atinge o solo, assim como a norma da velocidade.

Resolução

Dados

$\theta = 30^0$

$V_0 = 50m/s$

$g = 10m/s^2$

$X_{máx} = ?$

$h_{máx} = ?$

$\vec{r} = ?$

$\theta = ?$

$\|\vec{v}\| = ?$

Fórmula

17.1 $X_{máx} = \frac{V_0^2 sen(2\theta)}{g}$

$$X_{máx} = \frac{50^2 .\ sen(2\ .\ 30^0)}{10}$$

$$X_{máx} = \frac{2500\ .\ sen60^0}{10}$$

$$X_{máx} = \frac{2500\ .0,9}{10} \leftrightarrow X_{máx} = \frac{2250}{10} = 225m$$

$$X_{máx} = 2,25.\ 10^2 m$$

R: O alcance horizontal da bola é de $225.m$ ou $2,25.10^2 m$.

17. 2 $h_{máx} = \frac{(V_0 sen\theta)^2}{2g}$

$$h_{máx} = \frac{(50\ sin30)^2}{2.10} \leftrightarrow h_{máx} = \frac{(50\ .0,5)}{20} = \frac{25^2}{20} = \frac{625}{20}$$

$$h_{máx} = 31,25m$$

R: A altura máxima atingida pela bola é de $31,25m$.

17.3

$$t = \frac{2V_0 sen\theta}{g} \leftrightarrow t = \frac{2.50\ sen30}{10} \leftrightarrow t = \frac{100\ .0,5}{10} \leftrightarrow t = \frac{50}{10} = 5s$$

A posição da bola que é pedida é para um instante t_1 tal que:

$$t_1 = \frac{1}{4}t \leftrightarrow t_1 = \frac{1}{4}.5 \leftrightarrow t_1 = \frac{5}{4} = 1,3s$$

A posição da bola é dada pela lei do movimento.

$$\vec{r} = V_0 cos\theta t\vec{e}_x + \left(V_0 sen\theta t - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{e}_y$$

$$\vec{r} = 50cos30\ \ x\ 1,3\vec{e}_x + \left[50\ .sen30^0\ x\ 1,3 - \frac{1}{2}.10.(1,3)^2\right]\vec{e}_y$$

$$\vec{r} = 65\ .\ 0,866\vec{e}_x + [65\ .\ 0,5 - 5\ .1,69]\vec{e}_y$$

$$\vec{r} = 56\vec{e}_x + [32,5 - 8,45]\vec{e}_y$$

$$\vec{r} = 56\vec{e}_x + 24\vec{e}_y\ \ m$$

R: A posição da bola decorrido $\frac{1}{4}$ do tempo de voo é de $56\vec{e}_x + 24\vec{e}_y\ \ (m)$

17.4 – A velocidade da bola, em qualquer instante, é dada pela lei das velocidades: $\vec{v} = V_0 cos\theta\vec{e}_x + (V_0 sen\theta - gt)\vec{e}_y$

Como a bola atinge o solo, no instante $5s$ a velocidade da bola nesse instante será: $\vec{v} = 50cos30^0\vec{e}_x + (50sen30^0 - 10\ .5)\vec{e}_y$

$$\vec{v} = 50\ .0,866\vec{e}_x + (50\ .0,5 - 50)\vec{e}_y$$

$$\vec{v} = 43,3\vec{e}_x + (25 - 50)\vec{e}_y$$

$\vec{v} = 43\vec{e}_x - 25\vec{e}_y\ \ m/s$ onde

$V_x = 43m/s$ e $V_y = -25m/s$

O ângulo θ que a direcção da velocidade faz com a direcção horizontal, no instante em que a bola atinge o solo pode ser determinado pela relação trigonométrica.

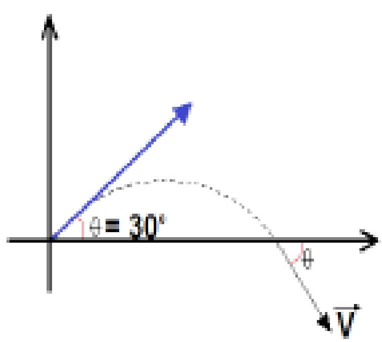
$$tg\theta = \frac{v_y}{v_x} \Leftrightarrow tg\theta = -\frac{25}{43} \Leftrightarrow tg\theta = -0{,}58$$

$$\theta = 30^0$$

A norma do vector velocidade no instante em que atinge o solo é:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{43^2 + (-25)^2} = \sqrt{1849 + 625}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2474} \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = 49{,}7m/s \quad \|\vec{v}\| = 50\, m/s$$



Comparando a velocidade inicial, $\vec{v}_0$, da bola e a velocidade, $\vec{v}$, com que este atinge o nível de lançamento (neste caso o solo) concluímos que apresentam o mesmo valor, como era de esperar, só a direcção e sentido é que são diferentes.

18 – Deslocam-se numa rodovia rectilínea e paralela dois motoqueiros com velocidades constantes de normas $\|\vec{v}_M\| = 15m/s$ e $\|\vec{v}_N\| = \frac{25m}{s}$, respectivamente.

18.1 Determine a velocidade do motoqueiro N, relativamente ao motoqueiro M, $\vec{v}_{N/M}$:

18.1.1 – Se movem em mesmo sentido;

18.1.2- Se movem em sentidos contrarios;

18.2 Determine a velocidade do motoqueiro N relativamente ao motoqueiro M, se os rodovios fazem entre si um ângulo de 60^0.

Resolução

Dados

$\|\vec{v}_M\| = 15m/s$

$\|\vec{v}_N\| = 25m/s$

$\vec{v}_{N/M} = ?$

$\theta = 60^0$

$\vec{v}_{N_x} = ?$

$\vec{v}_{N_y} = ?$

Fórmula

18.1.1 $\vec{v}_{N/M} = \vec{v}_N - \vec{v}_M$

$\vec{v}_{N/M} = 25\vec{u}_x - 15\vec{u}_x$

$\vec{v}_{N/M} = 10\vec{u}_x$

R: A velocidade do motoqueiro N relativamente ao motoqueiro M, é igual a $10\vec{u}_x$.

18.1.2- Considerando que o motoqueiro N se desloca no sentido positivo e o M no sentido negativo, temos: $\vec{v}_M = -15\vec{a}_x\, m/s$ e $\vec{v}_N = 25\vec{a}_x\, m/s$

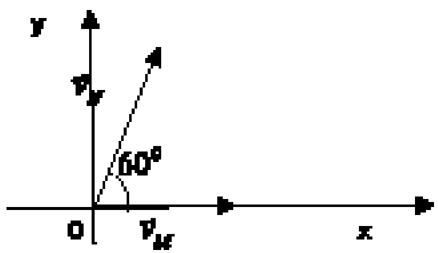
$$\vec{v}_{N/M} = 25\vec{a}_x - (15\vec{a}_x)$$

$$\vec{v}_{N/M} = 25\vec{a}_x + 15\vec{a}_x = 40\vec{a}_x m/s$$

R: A velocidade do motoqueiro N, relativamente ao motoqueiro M Se movem em sentidos contrarios é de $40\vec{a}_x m/s$.

18.2 – Se as rodovia fazem entre si um ângulo de 60^0, podemos considerar por exemplo, a rodovia M, sendo o eixo dos xx, e a rodovia do motoqueiro N a fazer um ângulo de 60^0 com o eixo dos xx. Sendo assim, temos de começar por exprimir $\vec{v}_N$ em função das suas componentes $\vec{v}_{N_x}$ e $\vec{v}_{N_y}$

Com a ajuda da figura, vemos que:



$$\vec{v}_{N_x} = v_N \cos\theta\, \vec{a}_x$$

$$\vec{v}_{N_x} = 25\cos 60^0\, \vec{a}_x$$

$$\vec{v}_{N_x} = 25.\frac{1}{2}\vec{a}_x$$

$$\vec{v}_{N_x} = 12,5\vec{a}_x m/s$$

$$\vec{v}_{N_y} = v_N \sin\theta\, \vec{a}_y \leftrightarrow \vec{v}_{N_y} = 25\sin 60^0\, \vec{a}_y$$

$$\vec{v}_{N_y} = 25.\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_y \leftrightarrow \vec{v}_{N_y} = \frac{25.1,732}{2}\vec{a}_y \leftrightarrow \vec{v}_{N_y} = \frac{43,3}{2}\vec{a}_y$$

$$\vec{v}_{N_y} = 21,65\vec{a}_y \leftrightarrow \vec{v}_{N_y} = 21,7\vec{a}_y\, m/s$$

Sabendo que $\vec{v}_N = \vec{v}_{N_x} + \vec{v}_{N_y}$ temos:

$\vec{v}_N = 12,5\vec{a}_x + 21,7\vec{a}_y$ como

$\vec{v}_M = 15\vec{a}_x m/s$ e como $\vec{v}_{N/M} = \vec{v}_N - \vec{v}_M$ teremos:

$$\vec{v}_{N/M} = 12,5\vec{a}_x + 21,7\vec{a}_y - 15\vec{a}_x$$

$$\vec{v}_{N/M} = -2,5\vec{a}_x + 21,7\vec{a}_y m/s$$

19 - Consideremos uma bola de futebol lançada horizontalmente, com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$. Desprezando a resistência do ar, a sua trajectória é, como já sabemos, parabólica. Calcule:

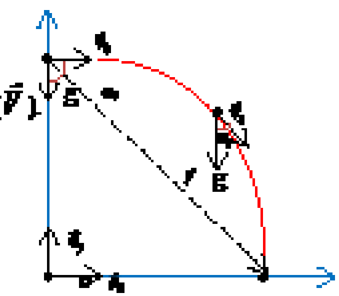
19.1-O vector posição ($\vec{r}$).

19.2-O vector velocidade ($\vec{v}$).

19.3-A aceleração $\vec{a}$.

19.4-O tempo de voo (t).

19.5-A distância.



Resolução

19.1 $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ onde $x = v_0 t$ e $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$

$$\vec{r} = v_0 t\vec{e}_x + \left(y_o - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{e}_y$$

19.2 $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\vec{V} = v_0\vec{e}_x - \frac{2}{2}gt\vec{e}_y$$

$$\vec{V} = v_0\vec{e}_x - gt\vec{e}_y$$

19.3 Lei das acelerações:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v} = v_0\vec{e}_x - gt\vec{e}_y$$

$$\vec{a} = -g\vec{e}_y$$

19.4- Para calcular o tempo de voo devemos ter em conta a equação paramétrica do projéctil tendo em conta o eixo y.

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Siendo $y = 0$m (instante em que o projéctil atingi o solo)

$$0 = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow -y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow y_0 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{2y}{g} = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} \Rightarrow \text{Tempo de voo}$$

19.5- A distância

$x = x_0 + v_0 t$ Para $x_0 = 0m$ temos:

$$x = v_0 t \Leftrightarrow x = v_0\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

20. Um corpo é lançado obliquamente com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$, que faz com a horizontal um ângulo α. Associemos a este movimiento um sistema de referência no plano oxy com origem coincidente com o ponto de lançamento.

Calcule:

20.1- O vector de posição.

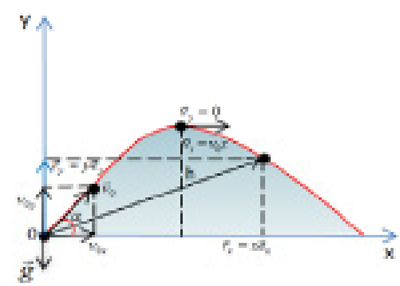
20.2-O vector velocidade.

20.3-A aceleração.

20.4-O tempo de subida.

20.5-A altura máxima alcançada

20.6-O alcance horizontal do corpo.



Resolução

20.1 $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y \Leftrightarrow \vec{r} = v_{0x}t\vec{u}_x + (v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2)\vec{u}_y$

$\vec{r} = v_0\cos(\alpha).t\vec{u}_x + [v_0 sen(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2]\vec{u}_y$ vector posição

20.2 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Leftrightarrow \vec{v} = v_0\cos(\alpha)\vec{u}_x + [v_0 sen\alpha - \frac{2gt}{2}]\vec{u}_y$

$\vec{v} = v_0\cos(\alpha)\vec{u}_x + [v_0 sen\alpha - gt]\vec{u}_y$ Como $v_{0x} = v_0\cos\alpha$ e $v_{0y} = v_0 sen\alpha$ temos: $\vec{v} = v_{0x}\vec{u}_x + [v_{0y} - gt]\vec{u}_y$ vector velocidade

20.3- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \vec{a} = -g\vec{u}_y$ já que a aceleração tem só componente vertical.

20.4- Tempo de subida

Um corpo alcança a altura máxima no instante de tempo em que a componente vertical da aceleração $\vec{v}_y$ se anula.

Assim: $\vec{v} = v_{0y}\vec{u}_y - gt\vec{u}_y \Leftrightarrow \vec{v}_y = v_0 sen\alpha - gt$

Sendo a velocidade escalar v_y dada pela expressão $v_y = v_0 sen\alpha - gt$ como $v_y = 0m/s$ y $t = t_s$ se obtem $0 = v_0 sen\alpha - gt_s$

$-v_0 sen\alpha = -gt_s \Leftrightarrow t_s = \frac{v_0 sen\alpha}{g}$ o $t_s = \frac{v_{0y}}{g} \Rightarrow$ Tempo de subida.

20.5- A altura máxima se obtem a partir da equação paramétrica segundo o eixo y.

$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ fazendo $y = h_{máx}$ e $t = t_s$ temos:

$h_{máx} = v_{0y}t_s - \frac{1}{2}gt_s^2$ como $v_{0y} = v_0 sen\alpha$ e $t_s = \frac{v_{0y}}{g}$ temos:

$h_{máx} = v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g(\frac{v_{0y}}{g})^2 \Leftrightarrow h_{máx} = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$

$h_{máx} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$ o $h_{máx} = \frac{(v_0 sen\alpha)^2}{2g}$ se $y_{0\neq 0}$

$h_{máx} = y_0 + \frac{(v_0 sen\alpha)^2}{2g}$

20.6- Alcance máximo

Na expressão $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ fazendo $y = 0m$ temos:

$0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow 0 = t(v_{0y} - \frac{1}{2}gt)$

$t = 0s$ y $t = \frac{2v_{0y}}{g} \Rightarrow$ Tempo de voo.

Como $x = v_{0x}t$ substituindo tempo temos:

$$x_{max} = \frac{2v_{0x}.v_{0y}}{g} \text{ como } v_{0x} = v_0 \cos\alpha \text{ e } v_{0y} = v_{0y} sen\alpha$$

$$x_{max} = \frac{2v_0^2 sen\alpha.\cos\alpha}{g} \text{ como } sen(2\alpha) = 2sen\alpha.\cos\alpha$$

temos:

$$x_{max} = \frac{v_0^2 sen(2\alpha)}{g}$$

Problemas propostos

21-Sejam $x(t)$ e $y(t)$ as coordenadas no Sistema Internacional de Unidades, de uma partícula material que se desloca no plano oxy; onde

$x(t) = 2,0t$ (SI) y $y(t) = 3,0t^2 + 5,0$ (SI).

21.1-Escreva a equação do movimento da partícula.

Determine para $t = 3,0s$:

21.2- As componentes do vector posicição $\vec{r}$.

22-Um corpo material se desloca em um plano oxy, sendo as coordenadas $x(t) = 4,0t$ e $y(t) = 4,0t^2 + 7$

22.1-Escreva a equação do movimento do corpo.

Determine para $t = 4,0s$:

22.2-As componentes do vector posição $\vec{r}$.

22.3- A distância do corpo a origem do sistema de referência.

23 - O movimento de uma partícula é caracteriza polas equações paramétricas:

$x = 2,0t + 2$ (SI) y $y = 3,0t^2 - 1$ (SI)

Determine:

23.1-A equação do movimento da partícula;

23.2-As componentes do vector posição para $t = 3,0s$.

23.3-A distância recorrida para o mesmo intervalo de tempo.

23.4-Escreva a equqção cartesiana da trajectória da partícula.

24- Uma partícula material que se desloca ao lango do plano oxy, apresenta a seguinte lei de velocidade: $\vec{V} = 2,0\vec{e}_x + 6,0t\vec{e}_y$ (S.I).

Determine:

24.1-As coordenadas de posição da partícula no instante $t = 1,0s$ sabendo que no instante inicial se encuentram no ponto de coordenadas $x = 1,0m$ e $y = 1,0m$.

24.2- A lei da aceleração do movimento da partícula.

24.3-A aceleração média da partícula entre os instantes $t = 1,0s$ e $t = 2,0s$.

25- Sabendo que a lei das velocidades de uma partícula material que se desloca ao lango do plano oxy é $\vec{V} = 4{,}0t\vec{e}_x + 8{,}0t\vec{e}_y$ (S.I).

Determine:

25.1- As coordenadas da posição da particula no instante $t = 2{,}0s$ sabendo que no instante inicial se encontram em um punto de coordenadas $x = 2{,}0m$ e $y = 2{,}0m$

25.2- A aceleração média da partícula entre os instantes $t = 2{,}0s$ e $t = 3{,}0s$.

25.3- A lei das acelerações do movimento da partícula.

25.4- A amplitude do ângulo entre as direcções da velocidade v e a aceleração a, no instante $t = 2{,}0s$.

26- Dada a lei das velocidades $\vec{V} = 2{,}0t\vec{e}_x + 4{,}0t\vec{e}_y$ de uma particula material que se desloca ao lango do plano oxy. Determine:

26.1- As coordenadas de posição da particula no instante $t = 1{,}0s$ sabendo que no instante inicial se encontram em um ponto de coordenadas $x = 1{,}0m$ e $y = 1{,}0m$.

26.2- A aceleração média da partícula entre os instantes $t = 1{,}0s$ e $t = 2{,}0s$.

26.3- A lei das acelerações do movimiento da partícula.

26.4- A amplitude do ângulo entre as direcções da velocidade v e da aceleração a, no instante $t = 1{,}0s$.

27- O movimento de uma partícula é caracterizado pelas equações paramétricas $x = t + 2$ (SI) e $y = t^2 + 1$ (SI).

Determine:

27.1- O vector posição e o seu módulo para um tempo igual a $4{,}0s$.

27.2- O vector deslocamento e o módulo entre os instantes $t = 1{,}0s$ e $t = 4{,}0s$.

28- O movimento de uma partícula é caracterizado pelas equações parametricas:

$x = t + 2$; (SI) $y = t^2 + 1$ (SI) e $z = 2m$

Determine:

28.1 A lei do movimento da partícula;
28.2- As componentes do vector posição para $t = 2{,}0s$
28.3- A distância para o mesmo intervalo de tempo.
28.4- Indique a equação cartesiana da trajectória da particula.
29- Sabe-se que as coordenadas de uma partícula material em movimento no plano $oxyz$ são:

$$\begin{cases} x = t^2 - 3,0 \\ y = t^4 + 1,0 \\ z = 3,0 \end{cases}$$

Determine:

29.1 – O vector posição da partícula no instante t;

29.2 – A norma do deslocamento da partícula entre $t = 2,0s$ e $t = 3,0s$;

29.3– A velocidade média da partícula no intervalo $[2,0;3,0]s$.

29.4– A velocidade da partícula no instante t.

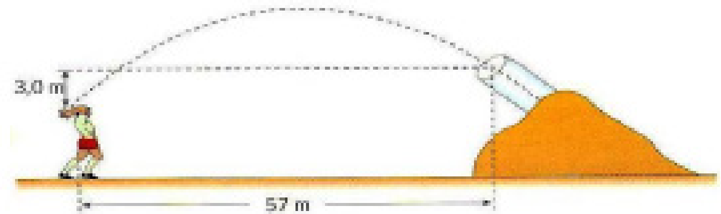
30-Um canhão de uma fortaleza, que se encontra a $67,0m$ de altura disparou horizontalmente u projéctil com velocidade inicial de $57,0m/s$.

Calcule:

30.1- A distância alcançada pelo projéctil.

30.2-O módulo do vector velocidade do projéctil no instante $t = 1,0s$.

31. O Pedro quer acertar com uma bola num tubo inclinado 45^0 com a horizontal e que se encontra a uma distância de $57m$, tal como se ilustra na figura.

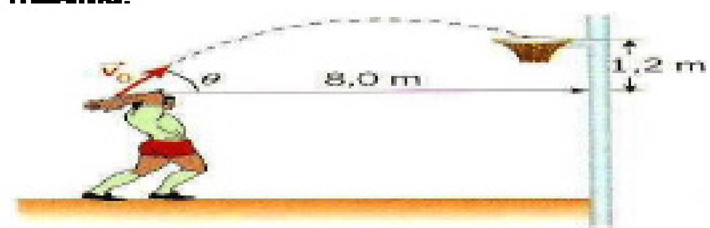


Sabendo que a bola permanece $3,0s$ no ar, calcule o ângulo e a velocidade inicial com que o Pedro deve lançar a bola para poder alcançar o objectivo desejado.

32- Num jogo de basquetbol, o Carlos encestou a uma distância de $8,0m$. Sabendo que o aro se encontrava 1,2m a cima da posição de lançamento da bola e que a mesma estava no ar durante 1,6s até encestar, calcule:

32.1- O ângulo formado pela direcção da velocidade da bola em relação a horizontal, no instante de lançamento.

32.2- O instante em que a bola alcançou a altura máxima.



2.2.1.1. Soluções para o sistema de problemas proposto

21.

21.1 $\vec{r} = 2{,}0t\vec{e}_x + (3{,}0t^2 + 5{,}0)\vec{e}_y$ (SI)

21.2 $\vec{r}_x = 6{,}0\vec{e}_x(m)$ y $\vec{r}_y = 32{,}0\vec{e}_y(m)$

22.

22.1 $\vec{r} = 4{,}0t\vec{e}_x + (4{,}0t^2 + 7{,}0)\vec{e}_y$ (SI)

22.2 $\vec{r}_x = 16{,}0\vec{e}_x(m)$ y $\vec{r}_y = 71{,}0\vec{e}_y(m)$

22.3 $\|\vec{r}\| = 72{,}8m$

23.

23.1 $\vec{r} = (2t + 2)\vec{e}_x + (3t^2 - 1)\vec{e}_y$

23.2 $\vec{r} = 8\vec{e}_x + 26\vec{e}_y$

23.3 $d = 27m$

23.4 $y = \dfrac{3x^2}{4} - 3x + 2$

24.

24.1 As coordenadas de posição da partícula, no instante $t = 1{,}0s$ são respectivamente: $x = 3{,}0m$ y $y = 4{,}0m$.

24.2 A lei das acelerações do movimento da partícula é igual a $6{,}0\,\vec{e}_y\,ms^{-2}$.

24.3 A aceleração média da partícula entre os instantes $t = 1{,}0s$ e $t = 2{,}0s$ é de $6{,}0m/s^2$.

25.

25.1 As coordenadas de posição da partícula, no instante $t = 2{,}0s$ são respectivamente: $x = 10{,}0m$ e $y = 18{,}0m$.

25.2 A aceleração média da partícula entre os instantes $t = 2{,}0s$ y $t = 3{,}0s$ é de $8{,}0\vec{e}_y m/s^2$.

25.3 A lei das acelerações do movimento da partícula é igual a $8{,}0t\vec{e}_y m/s^2$.

25.4 A amplitude do ângulo entre as direcções da $\vec{v}$ e da $\vec{a}$, no instante $t = 2{,}0s$ é igual a 14^0.

26.

26.1 As coordenadas de posição da partícula, no instante $t = 1{,}0s$ são respectivamente: $x = 3{,}0m$ e $y = 5{,}0m$.

26.2 A aceleração média da partícula entre os instantes $t = 1{,}0s$ e $t = 2{,}0s$ é de $2{,}0\vec{e}_x + 4{,}0\vec{e}_y (m/s^2)$.

26.3 A lei das acelerações do movimento da partícula é igual a $2{,}0\vec{e}_x + 4{,}0\vec{e}_y (m/s^2)$.

26.4 A amplitude do ângulo entre as direcções da $\vec{v}$ da $\vec{a}$, no instante $t = 1{,}0s$ é igual a 8^0.

27.

27.1 $\vec{r} = 6\vec{e}_x + 17\vec{e}_y$ e $\|\vec{r}\| = 18m$

27.2 $\Delta\vec{r} = 3\vec{e}_x + 15\vec{e}_y$ a sua norma é $\|\Delta\vec{r}\| = 1{,}5.10m$

28.

28.1 $\vec{r} = (t+2)\vec{e}_x + (t^2+1)\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$ esta é a expressão que traduz a Lei do movimento.

28.2 $\vec{r} = 4\vec{e}_x + 5\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$; Logo $\vec{r}_x = 4\vec{e}_x$; $\vec{r}_y = 5\vec{e}_y$ $\vec{r}_z = 2\vec{e}_z$ são as componentes do vector posição.

28.3- A distância do corpo a origen do referêncial é igual a $6{,}7m$.

28.4- A equação cartesiana da trajectória da partícula é $y = x^2 - 4x + 3$.

29.

29.1 $\vec{r} = (t^2 - 3)\vec{e}_x + (t^2 + 1)\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$

29.2 $\|\Delta\vec{r}\| = 7{,}1m$

29.3 $\vec{v}_m = 5\vec{e}_x + 5\vec{e}_y$ (m/s)

29.4 $\vec{v} = 2t\vec{e}_x + 2t\vec{e}_y$ (m/s)

30.

30.1 $\Delta x = 211m$ ou $\Delta x = 2{,}1.10^2 m$

30.2 $\|\vec{v}\| = 58m.s^{-1}$

31. $\theta = 40^0$ e $\vec{v}_0 = 19\vec{e}_x + 16\vec{e}_y$ (m/s)

32.

32.1 $\theta = 61^0$

32.2 $t = 0{,}88s$

Algumas equações fundamentais

A equação que traduz a lei do movimento é: $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$

As coordenadas de $\vec{r}$ são: $\vec{r}_x = x\vec{e}_x$ e $y = y\vec{e}_y$

A distância do corpo à origem do referêncial: $d = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

A lei do movimento da partícula: $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

A distância do corpo: $\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Expressão do vector posição ou vector deslocamento: $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{e}_x + \Delta y\vec{e}_y + \Delta z\vec{e}_z$ ou $\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{e}_x + (y_2 - y_1)\vec{e}_y + (z_2 - z_1)\vec{e}_z$

A norma do deslocamento da partícula: $\|\Delta\vec{r}\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

A velocidade média da partícula: $\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

A velocidade da partícula no instante t: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \leftrightarrow$ $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$

A norma do vector velocidade: $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

A aceleração média da partícula: $\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$;

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

A lei das acelerações do movimento da partícula:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}_x}{dt} + \frac{d\vec{v}_y}{dt}$$

Para calcular o ângulo formado entre, as direcções da $\vec{v}$ e da $\vec{a}$:

$$\vec{v}.\vec{a} = \|\vec{v}\|.\|\vec{a}\|.\cos\theta$$

$$\vec{v}.\vec{a} = v_x.a_x + v_y.a_y$$

$$v_x.a_x + v_y.a_y = \|\vec{v}\|\|\vec{a}\|.\cos\theta$$

A norma da $\vec{a}$ no instante t: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

Lei das posições (lançamento horizontal): $\vec{r} = v_0 t\vec{u}_x + \left(y_0 - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{u}_y$

O tempo de queda (tempo de voo): $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$

A distância entre o ponto de impacto da esfera no solo e a vertical da posição de lançamento: $x = x_0 + V_0 t$

O alcance horizontal do projéctil (Lançamento oblíquo): $X_{máx} = \frac{V_0^2 sen(2\theta)}{g}$

A altura máxima atingida (Lançamento oblíquo): $h_{máx} = \frac{(v_0 sen\theta)^2}{2g}$

O tempo de voo. Este é dado pela expressão: $t = \frac{2v_0 sen\theta}{g}$ (tempo de voo)

A posição do projéctil é dada pela lei do movimento:

$$\vec{r} = v_0\cos\theta t\vec{u}_x + \left(v_0 sen\theta t - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{u}_y$$

A posição do projéctil é dada pela lei do movimento:

$$\vec{r} = v_0\cos\theta t\vec{u}_x + \left(v_0 sen\theta t - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{u}_y$$

A velocidade do projéctil, em qualquer instante, é dada pela lei das velocidades: $\vec{v} = v_0\cos\theta\vec{u}_x + (V_0 sen\theta - gt)\vec{u}_y$

O ângulo θ que a direcção da velocidade faz com a direcção horizontal, no instante em que o projéctil atinge o solo: $tg\theta = \frac{v_y}{v_x}$.

A norma do vector velocidade no instante em que atingi o solo $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Recomendações didácticas

O sistema de problemas para o desenvolvimiento de habilidades na resolução de problemas de Física deve ser elaborado tendo em conta a contextualização.Portanto, a contextualização é um instrumento bastante útil, porque permite levar o aluno a reflectir a partir de certo conjunto ou sistema de conhecimento e colocá-lo em prática de modo a resolver problemas do seu quotidiano.

O sistema de problemas deve caracterizar-se por ser flexivel e adaptavel as condições cambiantes do grupo de alunos, de forma que responda as necessidades do grupo em geral e de cada aluno em particular.

O trânsito do estudante por este sistema de problemas deve possibilitar o desenvolvdendo de habilidades na aplicação das Leis do movimento de uma partícula no plano e não só.

Motivar os alunos para que tenham hábito de exercítar os conhecimentos prévios, visto que só com o enfrentamento de situações novas não se garante os níveis de domínio desejado, por isso, se requer de um processo posterior de exercitação, ao lango do qual se fazem mais precisas e menos complexas as operações.

BIBLIOGRAFIA

Álvarez, I., Mestre, U., Fuentes, H. (1996) La enseñanza problémica y su contribución a la formación de habilidades. Revista Cátedra. Centro de Estudios de educación Superior de la Universidad de Oriente. No. 1. Enero - Marzo 1996. Pp. 20 - 28.

Álvarez, R. (1984): El sistema de habilidades profesionales en la Metodología de la enseñanza. Revista Varona # 8. Ciudad de la Habana.

ANGOLA. Ministério da Educação (MED). Currículo do II ciclo do Ensino Secundário. Luanda, 2003.

ANGOLA. Ministério da Educação (MED)/ Instituto Nacional de Investigação e Desenvolvimento.

Calulo, J.L.S; Mestre, U. (2014). Desarrollo de habilidades en la resolución de problemas de Física de los alumnos de decimosegundo grado en la Escuela de Segundo ciclo Comandante Vilinga de Huambo, Angola. Tesis de Maestría en Didáctica de la Educación Superior.

Calulo, J.L.S; Mestre, U. (2013). Necessidade e possibilidade de actualizar, desde o ponto de vista científico e tecnológico o currículo e a metodología de ensino da disciplina Física na 12ª clase da Escola do Segundo Ciclo do Ensino Secundário. CD-ROM de Memorias del VIII Taller Internacional “Innovación Educativa-Siglo XXI” y VII Congreso Iberoamericano de Educación Científica. Las Tunas, Cuba. Mayo 2013. Editorial Universitaria del Ministerio de Educación Superior de la República de Cuba. ISBN 978-959-16-2107-8.

DE ALMEIDA Léia Ribeiro. Resolução de problemas: uma metodologia para o ensino aprendizagem em matemática. 2014. Artigo apresentado ao Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE) da Secretaria da Educação, sob a orientação do professor Olívio Augusto Weber. Acessado em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_leia_ribeiro_almeida.pdf. 07.04.2014. 20h40.

DE ARAÚJO, Andriely Iris Silva. Resolução de problemas curiosos como potencializadora do pensamento matemático dos alunos: uma experiência com Problemas de Malba Tahan. TCC. Campina Grande, PB. 2014.

DE OLIVEIRA, Katya Luciane, et al, Estratégias de Aprendizagem e Desempenho Acadêmico: Evidências de Validade. In: Psicologia: Teoria e Pesquisa. Out-Dez 2009, Vol.25 n. 4, pp. 531-536.

Desenvolvimento da Educação (INIDE). . Programa de Física da 10ª, 11ª e 12ª Classe. 2003.

Duli, J. L. Barros, (2014).Estudo sobre as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas contextualizados em Cabinda/Angola. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação –Conhecimento e Inclusão Social – da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito à obtenção do título de Mestre em Educação. Belo Horizonte.

Instituto Nacional do Desenvolvimento da Educação (2007) Plano Curricular do Ensino Secundário Geral. NDE/MEC.

LEITE, C. A. R.; LEITE, E. C. R.; PRANDI, L. R. A aprendizagem na concepção histórico-cultural. Akrópolis Umuarama, v. 17, n. 4, p. 203-210, out./dez. 2009.

LEITE, C. A. R.; LEITE, E. C. R.; PRANDI, L. R. A aprendizagem na concepção histórico-cultural. Akrópolis Umuarama, v. 17, n. 4, p. 203-210, out./dez. 2009.

Maciel, N. (2007). Física 12ª clase. Ministerio de Educação. Angola. Plural Editores. Porto Editora. Portugal.

SANTOS, Anderson Oramisio, OLIVEIRA Camila Rezende. Contextualização: conceitos e possibilidades de ensino e Aprendizagem da matemática nos anos iniciais do ensino Fundamental. Cadernos da Fucamp, v.13, n.18, p.104-108, 2014.

TUFANO, Wagner. Contextualização. In: Fazenda, Ivan C. A. Dicionário em construção: Interdisciplinaridade. São Paulo. Cortez, 2001.

VASCONCELOS, Maria Betânia Fernandes. A contextualização e o ensino de Matemática: um. estudo de caso. Dissertação de mestrado. João Pessoa–PB. 2008.

VIEIRA, Gláucia Marcondes. Estratégias de "contextualização" nos livros didáticos de matemática dos ciclos iniciais do ensino fundamental. 2004. Dissertação (Mestrado) –Faculdade da Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2004. 139p.

Impresso em RISOGRAPH, Abril de 2015.
Esta edição é composta por 1.000 cópias.
Departamento de Edições, Universidade de
Las Tunas, Cuba