APRENDIZAGEM DO CÁLCULO PARA ECONOMISTAS — CARATERIZAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS NO NÍVEL SUPERIOR

O livro é resultado da tese de doutaramento e tem como objetivo caraterizar a aprendizagem do Cálculo I à luz das teorias APOS e da Reificação de Ed Dubinsky e AnnaSfard, respetivamente. Para contextualizar faz-se uma abordagem de teorias de Investigação em Educação Matemática e de teorias da aprendizagem. A teoria APOS e a da Reificação são duas teorias cognitivistas consequentes do Construtivismo Cognitivista de Jean Piaget. Ambas permitiram-nos perceber melhor como os alunos constroem o seu conhecimento, bem como fenómenos e situações que interferem na sua construção. Com base num paradigma interpretativo, numa metodologia qualitativa, na modalidade de estudo de caso.Os dados recolhidos foram analisados à luz de teorias e estudos antecedentes. O estudo, realizado numa instituição de ensino superior de Angola, incidiu inicialmente sobre 10 alunos e, posteriormente, em função de conveniência do próprio estudo, restringiu-se a três alunos.De uma maneira geral os alunos têm maior compreensãooperacional do que concetual, manifestada predominantemente no desempenho algébrico. A associação entre processos anteriores e a compreensão dos alunos nem sempre é de sucesso-sucesso ou de insucesso-insucesso.Intrínsicas ao contexto, a investigação teve como limitações a predominante representação algébrica — em detrimento de maior equilíbrio com as representações gráfica, numérica e descritiva — dos conceitos do Cálculo I na sala de aula, bem como a necessidade de maior abrangência do trabalho colaborativo para tornar a construção do conhecimento mais social. Intrínsica à própria investigação, temos como limitação a necessidade de se prolongar o estudo no tempo.

Dr. C. Jorge Dias Veloso: Doutor em Didática da Matemática pela Universidade da Beira Interior. Mestre em Novas Tecnologias Aplicadas à Educação pelo Instituto Universitário de Pós-Grado. Licenciado em Ensino da Matemática pelo Instituto Superior de Ciências da Educação da Huíla. Membro da Sociedade Portuguesa de Investigação e Educação Matemática. Membro da Associação de Professores de Matemática de Portugal. Decano da Escola Superior Pedagógica da Lunda Norte, Universidade Lueji A'Nkonde

ISBN: 978-959-7225-44-7

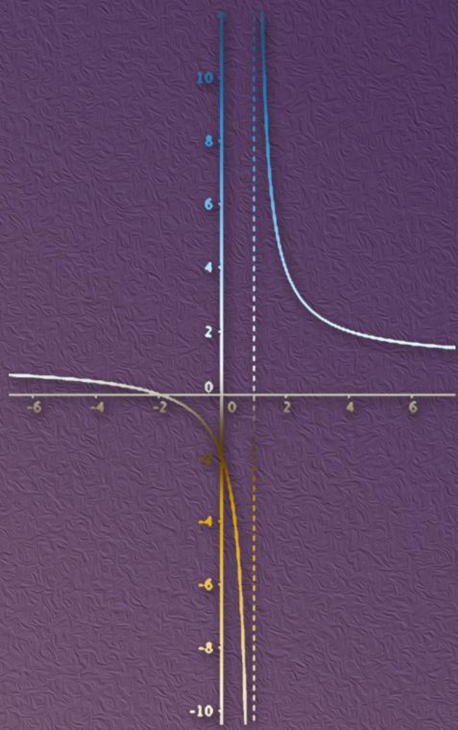
9 789597 225447

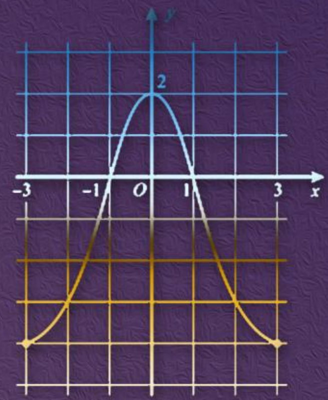
EDACUN
EDITORIAL ACADÉMICA UNIVERSITARIA

APRENDIZAGEM DO CÁLCULO PARA ECONOMISTAS — CARATERIZAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS NO NÍVEL SUPERIOR

Editorial Académica Universitaria

APRENDIZAGEM DO CÁLCULO PARA ECONOMISTAS — CARATERIZAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS NO NÍVEL SUPERIOR





Jorge Dias Veloso

UNIVERSIDAD DE LAS TUNAS

APRENDIZAGEM DO CÁLCULO PARA ECONOMISTAS — CARATERIZAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS NO NÍVEL SUPERIOR

Dr. C. Jorge Dias Veloso

EDACUN

Diseño y Edición: MSc. Osmany Nieves Torres. As.

Corrección: Dr. C. Joel Borrero Alarcón. P.T.

Dirección General: Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo. P.T.

Coedición: Opuntia Brava

ISBN: 978-959-7225-44-7

Editorial Académica Universitaria (Edacun)

Universidad de Las Tunas

Ave. Carlos J. Finlay s/n

Código postal: 75100

Las Tunas, 2019

ÍNDICE

Nota para o leitor

A presente investigação foi motivada por observações feitas ao longo dos últimos 13 anos à lecionação da unidade curricular Análise Matemática no primeiro ano dos cursos de ciências da educação, opções Física, Informática, Matemática e Química de duas instituições do Ensino Superior de Angola em que se leciona cursos de ciências da educação. Foi também motivada por observações feitas à lecionação da unidade curricular Cálculo nos primeiros e segundos anos de cursos da área de Economia de institutos superiores politécnicos de Angola. Foi ainda motivada pela pesquisa bibliográfica feita ao longo da frequência do primeiro ano do curso de doutoramento em Didática da Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade da Beira Interior, bem como pela troca de experiências feita com e entre colegas de trabalho, em particular professores da mesma unidade curricular, e colegas do curso de doutoramento. Importa aqui referir que as unidades curriculares Análise Matemática e Cálculo têm essencialmente o mesmo conteúdo, sendo que a sua diferença reside principalmente no grau de profundidade com que são lecionadas, no tempo letivo e, claro, na doseficação dos conteúdos — distribuição dos conteúdos pelos tempos letivos.

Ao longo das aulas de Análise Matemática é comum os alunos colocarem questões relacionadas com a origem e a necessidade de verificar os conteúdos lecionados, bem como questões relacionadas com a aplicação e os significados dos mesmos nas suas áreas de formação.

A experiência, resultante de observações, intercâmbios com colegas e de alguma pesquisa documental, permite constatar que várias são as razões para o surgimento desse tipo de questões, como passaremos a enumerar a seguir. (1) Vontade de aprender, o que é bastante bom, e a consequente procura por elos entre o conteúdo e a sua área de especialização. (2) Falta de competências necessárias para a frequência da unidade curricular, o que se verifica nos resultados dos testes de admissão ao subsistema do Ensino Superior em Angola. (3) Falta de motivação por parte dos alunos, o que é consequência de uma fraca orientação profissional ou mesmo do facto de os alunos não estarem situados quanto aos conteúdos que estudam e quanto ao seu papel nos processos de ensino e de aprendizagem. (4) Comportamento da parte de alguns alunos que, não entendendo os conteúdos lecionados, não manifestam interesse pelas aulas — voluntária ou involuntariamente cujas razões procuraremos apurar com a investigação. (5) Ineficiência da metodologia de ensino — por ser reprodutiva ou por não ter um crescimento gradual do nível de dificuldade, a metodologia não estimula o empenho dos alunos. (6) Dificuldade de articular os diferentes conteúdos.

O estudo recaiu sobre as duas últimas razões por permitir delimitar o estudo e por permitir estudar o fenómeno de um ponto de vista mais cognitivista. Claro está que, uma vez concluído o estudo, não será garantida a extinção da possibilidade do surgimento das aludidas questões dos alunos, mas sim estaremos em melhores condições de compreender o porquê do seu surgimento e em melhores condições de respondê-las, muitas vezes antes mesmo de serem colocadas ou de surgirem na consciência dos alunos.

Os processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral envolvem dificuldades de ordem diversa que se repercutem nas competências adquiridas pelos alunos durante a lecionação da unidade curricular. Com este estudo, pretende-se colocar ao dispor de professores alunos e investigadores uma caraterização e interpretação da aprendizagem que os alunos fazem de conceitos de Cálculo I, servindo de referência no exercício das suas atividades.

Objetivos

A seguir apresentamos os objetivos da investigação de forma geral e de forma específica. Os mesmos serviram de referência para o desenvolvimento e para a conclusão da investigação, pois, ao longo da mesma procurámos alcançá-los. De forma geral, a investigação tem como objetivo caraterizar a aprendizagem dos alunos à luz das teorias APOS e da Reificação. De maneira específica pretendemos, com a investigação, caraterizar a aprendizagem dos alunos no domínio do Cálculo quando ingressam no Ensino Superior, bem como compreender de que forma esse domínio pode favorecer a aprendizagem de novos conceitos aí abordados.

Questões de investigação

Como interpretar fenómenos observados na aprendizagem do Cálculo à luz das teorias APOS e da Reificação, ambas da Educação Matemática? Procurámos selecionar questões que nos permitissem manter o sentido da nossa investigação enquadrando o objetivo geral acima apresentado. Para melhor orientar a nossa investigação, considerámos as seguintes questões de investigação:

- Qual o papel dos conhecimentos prévios na aprendizagem de conceitos do Cálculo?
- Que características têm as aprendizagens realizadas pelos alunos ao longo do estudo de tópicos de Cálculo específicos?

Como se pode notar, este estudo é predominantemente guiado por caraterizações, caraterização dos conhecimentos prévios com que os alunos ingressam no Subsistema do Ensino Superior e caraterização das suas aprendizagens de tópicos específicos do Cálculo. Espera-se, assim, poder contribuir para um melhor enquadramento dos conhecimentos que os alunos manifestam à entrada do ensino superior e aprofundar e refletir sobre o papel desses conhecimentos na construção de novos conceitos e novas aprendizagens no domínio do Cálculo.

CAPÍTULO 1.Revisão de literatura

Neste capítulo fazemos uma incursão pela literatura relacionada com a aprendizagem e, em particular, com a Educação Matemática. Fazemos também uma incursão por trabalhos antecedentes aos que sustentam esta tese. Abordamos teorias da aprendizagem de maneira genérica e maneira particular conforme as necessidades da investigação. Com a abordagem, do genérico (teorias da aprendizagem) para o particular (teorias cognitivas), das teorias que sustentam este estudo, pode-se compreender a cronologia das teorias, a cronologia dos conceitos, as fronteiras e as relações entre as teorias e os conceitos, entre outros aspetos. Deste modo, previne-se o risco de confusão entre teorias e conceitos. Com os antecedentes do tema completa-se o estado da arte, faz-se uma abordagem de trabalhos de destaque relacionados ao tema e constantes da literatura. Com os conceitos abordados na revisão de literatura consegue-se sustentar a linguagem técnica utilizada ao longo da tese, particularmente no tratamento de dados. A impossibilidade de mudar o contexto no qual se desenvolveu o estudo também contribuiu para a escolha de teorias cognitivas como as de maior referência na tese.

1.1. Papel da teoria na investigação em Educação Matemática

Uma vez que vamos assentar grande parte da nossa fundamentação em teorias, torna-se importante começarmos por entender o que se entende por teoria. Atendendo à tendência de confundir teoria com modelo, torna-se também importante distinguirmos um conceito do outro.

Schoenfeld (2000) apresenta padrões para avaliar teorias, modelos e resultados do vasto leque que existe em Educação Matemática:

> There is a wide range of results and methods in mathematics education. A major question then is the following: How much faith should one have in any particular result? What constitutes solid reason, what constitutes "proof beyond a reasonable doubt"?
>
> The following list puts forth a set of criteria that can be used for evaluating models and theories (and more generally any empirical or theoretical work) in mathematics education:
>
> • Descriptive power
>
> • Explanatory power
>
> • Scope
>
> • Predictive power
>
> • Rigor and specificity
>
> • Falsifiability
>
> • Replicability

• Multiple sources of evidence (“triangulation”)[1]. (Schoenfeld, 2000, p. 646).

Poder descritivo refere-se à capacidade da teoria capturar o que conta de maneira credível para os fenómenos em descrição. **Poder explicativo** refere-se ao provimento de informação sobre como e porquê que as coisas funcionam. **Escopo** refere-se ao alcance de fenómenos cobertos pela teoria. **Poder preditivo** refere-se à capacidade da teoria especificar alguns resultados antes do seu acontecimento. A predição na Educação e na Psicologia, com muita frequência, é diferente do que acontece na Física. **Rigor e especificidade** refere-se à capacidade de claramente distinguir objetos e à relação entre eles. Supõe-se que o conjunto de objetos e suas relações tenham os seus correspondentes no “mundo real”. Diante disso levanta-se as seguintes questões: quão bem definidos estão os termos? Vendo um (na vida real ou no modelo), identificar-se-ia? Quão bem definidas estão as relações entre eles? Até que ponto os objetos e as relações no modelo correspondem àquilo que supostamente representam? Não é expetável os mesmos tipos de correspondência entre partes do modelo e objetos do mundo real, tal como acontece em modelos físicos. Os construtos mentais e sociais, tal como a consciência no contrato didático, não são inspecionáveis nem mensuráveis como a temperatura, por exemplo. **Falsificabilidade** refere-se a consequências dos critérios poder preditivo e rigor e especificidade. Com a aplicação destes dois critérios são evitadas tautologias, ou seja, objetos e relações camuflados de novos, mas que na verdade não passam de objetos já existentes. **Replicabilidade** refere-se a uma consequência do critério rigor e especificidade. Há aqui duas questões a considerar: (1) Obter-se-á os mesmos resultados se as circunstâncias forem repetidas? (2) Outras pessoas, devidamente treinadas, farão as mesmas constataçõeos nos dados? A resposta a ambas questões depende de ter procedimentos e construtos bem definidos. O critério **Múltiplas fontes de evidência (“triangulação”)** refere-se à procura por evidências consensuais. As evidências encontradas podem ser enganosas, o que se pensa ser geral pode ser um artefato ou uma consequência das circunstâncias e não necessariamente um fenómeno geral. Neste aspecto as ciências da educação diferem das ciências exatas. Nestas as evidências dependem de demonstrações.

Importa também referir a observação de Bishop (1977) sobre a necessidade de uma teoria ter um **foco** quer para o pesquisador em Educação Matemática, quer para o professor de Matemática, quer para o indivíduo que desempenha os dois papeis.

[1] Há um vasto leque de resultados e métodos em educação matemática. No entando, uma questão fulcral é a seguinte: quanta fé dever-se-ia ter em qualquer resultado particular? O que constitui resultado sólido? O que constitui “prova para além de dúvida racional”? A lista seguinte apresenta um conjunto de critérios que podem ser utilizados para avaliar modelos e teorias (e de uma maneira mais geral, qualquer trabalho empírico ou teórico) em educação matemática: poder descritivo, poder explanatório, escopo, poder preditivo, rigor e especificidade, falsificabilidade, repicabilidade, múltiplas fontes de evidência (“triangulação”).

Kilpatrick observa em relação a seus pares e avança o que entende ser a distinção entre modelo e teoria:

> Like Sriraman and English, Schoenfeld does not spell out the distinction between model and theory, but his discussion suggests that whereas a model describes a phenomenon, embodies a theory, and therefore deals with some of the criteria, a theory needs to cover more territory, address a body of phenomena, and satisfy all criteria more fully. Theories must pass a variety of tests; they require verification across situations and circumstances. Models need to describe, but they may not by themselves, for example, offer much in the way of explanation or prediction. [2] (Kilpatrick, 2010, p. 4).

A partir da análise acima, podemos afirmar que um modelo está para uma teoria como uma parte está para um todo. Em nossa análise, considerando os nove critérios, já citados, que uma teoria deve reunir cumulativamente — ter poder descritivo, ter poder explanatório, ter escopo, ter poder preditivo, ter rigor e especificidade, falsificabilidade, replicabilidade, ter múltiplas fontes de evidência ou triangulação e, por último, ter foco —, um modelo é parte de uma teoria, ou seja, um modelo reúne, sem ser na íntegra, requisitos de uma teoria. Um modelo permite estudar um fenómeno ou uma quantidade restrita de fenómenos, ao passo que uma teoria permite estudar uma vasta gama de fenómenos.

Para Sriraman (2009), qualquer teoria, seja ela de pensamento, de ensino ou de aprendizagem, assenta numa filosofia de conhecimento. As teorias da Educação Matemática assentam em duas áreas do conhecimento, a Matemática e a Educação. Assim, na junção de duas áreas do conhecimento numa só, compreende-se a complexidade das teorias da Educação Matemática. A complexidade é maior ainda, pois as áreas do conhecimento que sustentam as teorias da Educação Matemática não se limitam às duas principais já indicadas. Atualmente, verifica-se a expansão da Educação Matemática pelas áreas da teoria da complexidade, neurociência, teoria crítica, teoria feminista, teoria da justiça social, teorias de rede, bem como semiótica.

A evolução de uma teoria passa pela expansão da sua abrangência em termos de fenómenos e de assuntos abordados. A filosofia associada à teoria levanta, consequentemente, novas questões que resultam numa maior complexidade de ordem ontológica, metodológica e epistemológica para a teoria. As novas respostas dadas aos novos desafios enriquecem a teoria.

---

[2] Tal como Sriraman e English, Schoenfeld não estabelece a distinção entre modelo e teoria, mas esta discussão sugere que ao passo que um modelo descreve um fenómeno, incorpora uma teoria e, portanto, lida com alguns critérios, uma teoria precisa de cobrir mais território, dirigir-se a um corpo de fenómenos e satisfazer todos os critérios mais completamente. As teorias devem ser aprovadas em uma variedade de testes, elas requerem verificação em situações e circunstâncias. Os modelos precisam de descrever, mas não o podem fazer por si só, por exemplo, oferecem muito no que diz respeito a explanação e predição.

Sobre a Filosofia da Educação Matemática, importa fazer referência a Lincoln e Guba (1994). Os autores referem-se à clarificação de uma filosofia da Educação Matemática, dizendo que qualquer disciplina dentro da área da Educação, obviamente incluindo a Educação Matemática, precisa de clarificar por si só as seguintes questões:

1. O que é na realidade? Ou qual é a natureza do mundo à nossa volta?

   Questão de base ontológica que se prende com a necessidade de distinguir objetos, real versus imaginário, concreto versus abstrato, existente versus não existente. (Sriraman, 2009b). Para Lincoln e Guba (1994), no paradigma positivista, realismo ingénuo significa realidade "real" mas compreensível. No paradigma pós-positivista, realismo crítico significa realidade "real", mas apenas compreensível imperfeita e probabilisticamente. No paradigma da teoria crítica, trata-se de realismo histórico moldado por valores sociais, políticos, culturais, económicos, étnicos e de género, cristalizados ao longo do tempo. Para os autores, no paradigma construtivista, trata-se de relativismo consubstanciado em realidades construídas local e especificamente. Para Heron e Reason (1997), no paradigma participativo, trata-se da realidade assente na realidade subjetiva-objetiva, co-criada pela mente e por um dado cosmos.

2. Como fazemos para conhecer o mundo à nossa volta?

   Questão metodológica que abre possibilidades para que várias disciplinas desenvolvam paradigmas metodológicos.

   Para Lincoln e Guba (1994), no paradigma positivista, a metodologia consiste em experimento/manipulação, consiste na verificação de hipóteses, consiste em métodos predominantemente quantitativos. No paradigma pós-positivista, consiste em experimento/manipulação modificado, consiste em multiplismo crítico, falsificação de hipóteses, pode incluir métodos qualitativos. No paradigma da teoria crítica, consiste na construção do conhecimento sobre uma base dialógica/dialética, consiste na construção do conhecimento com base no discernimento estrutural/histórico. No paradigma do construtivismo, consiste em (re)construções individuais ou coletivas de conhecimento, reunindo às vezes consenso, consiste em (re)construções hermenêuticas/dialéticas de conhecimento. Para Heron e Reason (1997), no paradigma participativo, consiste em participação política em inquérito de ação colaborativa, consiste no uso de linguagem assente em contexto experimental de partilha.

3. Como podemos ter certeza da "verdade" do que nós conhecemos?

   Questão epistemológica. Para Lincoln e Guba (1994), no paradigma positivista, o conhecimento é resultado de dualismo ou objetivismo, é resultado de descobertas tidas como verdadeiras. No paradigma pós-positivista, o conhecimento é resultado de uma modificação do dualismo e objetivismo, é resultado de comunidade e tradição críticas, é resultado de descobertas tidas como provavelmente verdadeiras. No paradigma da teoria crítica, o conhecimento resulta de subjetivismo, de descobertas mediadas pelo seu valor. No paradigma construtivista, o conhecimento resulta de subjetivsmo, de descobertas co-criadas. Para Heron e Reason (1997), no paradigma participativo, o conhecimento é resultado de subjetividade crítica em transação participativa com o cosmo; resultado de descobertas co-criadas; é resultado de uma epistemologia de base experimental, proposicional e prática.

Os três critérios apresentados por Lincoln e Guba (1994), ontologia, metodologia e epistemologia, sintetizam os nove critérios apresentados por Schoenfeld — poder descritivo, poder explicativo, escopo, poder preditivo, rigor e especificidade, falsificabilidade, replicabilidade, múltiplas fontes de evidência (“triangulação”) — e por Bishop (1977) — foco. Em nosso entender a reunião parcial dos critérios constitui blocos para a construção de um paradigma, ao passo que a reunião integral dos mesmos constitui as bases de uma filosofia da Educação Matemática.

Antes de seguirmos em frente, importa clarificar alguns conceitos-chave nos quais se apoia a nossa fundamentação.

Filosofia da Educação

Diferentemente da ciência a Filosofia preocupa-se mais com os “porquês” do que com os “comos”. A Filosofia da Educação segue o mesmo caminho, preocupa-se com a razão de existência de valores, princípios, objetivos e problemas da educação, ao passo que as Ciênias da Educação procuram explicá-los. Para Siegel (2009), A Filosofia da Educação ocupa-se de questões filosóficas sobre a natureza, os objetivos e os problemas da educação.

> PHILOSOPHY of education is that branch of philosophy that addresses philosophical questions concerning the nature, aims, and problems of education. As a branch of practical philosophy, its practitioners look both inward to the parent discipline of philosophy and outward to educational practice, as well as to developmental psychology, cognitive science more generally, sociology, and other relevant disciplines.
>
> The most basic problem of philosophy of education is that concerning aims: what are the proper aims and guiding ideals of education? A related question concerns evaluation: what are the appropriate criteria for evaluating educational efforts, institutions, practices, and products? Other important problems involve the authority of the state and of teachers, and the rights of students and parents; the character of purported educational ideals such as critical thinking, and of purportedly undesirable phenomena such as indoctrination; the best way to understand and conduct moral education; a range of questions concerning teaching, learning, and curriculum; and many others.[3] (Siegel, 2009, n.d.)

---

[3] Filosofia da educação é o ramo da filosofia que aborda questões filosóficas relativas à natureza, objetivos e problemas da educação. Como um ramo da filosofia prática, seus praticantes olham tanto para dentro da disciplina parental da filosofia quanto para a prática educacional, bem como para a psicologia do desenvolvimento, a ciência cognitiva mais geralmente, a sociologia e outras disciplinas relevantes.

O problema mais básico da filosofia da educação é o que diz respeito aos objetivos: quais são os objetivos apropriados e os ideais orientadores da educação? Uma questão relacionada diz respeito à avaliação: quais são os critérios apropriados para avaliar os esforços, instituições, práticas e produtos educacionais? Outros problemas importantes envolvem a autoridade do estado e dos professores e os direitos dos alunos e pais; o caráter de supostos ideais educacionais, como o pensamento crítico, e de fenômenos supostamente indesejáveis, como a doutrinação; a melhor

Como se pôde ver, o autor apresenta como problema central, aquele do qual todos os outros derivam, “quais são os objetivos apropriados e os ideais orientadores da educação?”. Nota-se que a Filosofia da Educação preocupa-se com questões estruturantes das Ciências da Educação, enquanto estas procuram explicar os fenómenos do seu âmbito de atuação.

Filosofia da Educação Matemática

Para Pais (2002), a Educação Matemática é a área de pesquisa educacional que tem como objeto de estudo a compreensão, a interpretação e a descrição de fenómenos relativos ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Para Douady (1984):

> La didactique des mathématiques étudie les processus de transmission et d'acquisition des différents contenus de cette science, particulièrement en situation scolaire ou universitaire. Elle se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage. Elle ne se réduit pas à chercher une bonne manière d'enseigner une notion fixée. Par exemple, l'organisation d'une activité, dont l'intention déclarée est l'apprentissage d'un savoir désigné, est un objet d'étude pour la didactique, même si cette activité échoue ou dévie de son objectif. La didactique se propose d'agir sur le système éducatif dans un sens « bénéfique », à savoir : améliorer les méthodes et les contenus de l'enseignement et proposer des conditions pour un fonctionnement stable de systèmes didactiques facilitant chez l'élève la construction d'un savoir vivant et fonctionnel par l'explicitation des structures en jeu.[4]

Com base no que apresenta Ponte (2008), podemos categorizar os campos de atuação da Didática da Matemática em Portugal em cinco grupos: aprendizagem do aluno, atividade do professor, atividade do investigador em Educação Matemática, desenvolvimento do currículo e contexto. É claro que não são áreas absolutamente dissociadas, elas são distinguidas pela predominância de uma dentre as outras e não pela exclusividade de uma dentre as outras.

---

maneira de entender e conduzir a educação moral; uma série de perguntas sobre ensino, aprendizagem e currículo; e muitos outros.

[4] A Didática da Matemática estuda os processos de transmissão e de aquisição dos diferentes conteúdos desta ciência, particularmente numa situação escolar ou universitária. Ela se propõe a descrever e explicar os fenómenos relativos às relações entre seu ensino e sua aprendizagem. Ela não se reduz a pesquisar uma boa maneira de ensinar uma determinada noção. Por exemplo, a organização de uma atividade, cuja intenção declarada é a aprendizagem de um conhecimento designado, é um objeto de estudo para a didática, mesmo que essa atividade falhe ou desvie de seu objetivo. A didática propõe-se a atuar sobre o sistema educacional de maneira "benéfica", a saber: melhorar os métodos e os conteúdos do ensino e propor condições para um funcionamento estável dos sistemas didáticos facilitando ao aluno a construção de um conhecimento vivo e funcional, explicando as estruturas envolvidas.

1. 2 Teorias de investigação em Educação Matemática

Como se nota na citação seguinte de Kilpatrick, na Europa, a Educação Matemática goza de maior autonomia que nos Estados Unidos da América. Naquela região ela é considerada autónoma, uma das ciências matemáticas, uma disciplina.

> I concluded, "A lack of attention to theory is characteristic of US research on mathematical learning and thinking" (p. 369). Although I am confident that a similar survey today would yield many more articles in which there was serious attention to a theoretical framework, the States are undoubtedly still behind Europe in serious theorizing in mathematics education. After all, Europeans engage in the study of the didactics of mathematics, which they consider both one of the mathematical sciences and a discipline in its own right, whereas Americans (at least this one) tend to hesitate to grant either quality to mathematics education."[5] (Kilpatrick, 2010, p. 5).

Para Pais, a Educação Matemática ocupa uma grande área delimitada dentro da Educação. O autor reconhece o objeto e, subentende-se, métodos próprios da Educação Matemática, conferindo, assim, autonomia a esta área de investigação em Educação. Nota-se que, diferentemente da hesitação de Kilpatrick, Pais considera a Educação Matemática como uma grande área de investigação em Educação, uma disciplina, como se nota na citação seguinte:

> A *educação matemática* é uma grande área de pesquisa educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenómenos referentes ao ensino e à aprendizagem da matemática, nos diversos níveis da escolaridade quer seja em sua dimensão teórica ou prática. Além dessa definição ampla, a expressão *educação matemática* pode ser ainda entendida no plano da prática pedagógica, conduzida pelos desafios do cotidiano escolar. Sua consolidação como área de pesquisa é relativamente recente, quando comparada com a história milenar da matemática e o seu desenvolvimento recebeu um grande impulso, nas últimas décadas, dando origem a várias *tendências teóricas*, cada qual valorizando determinadas temáticas educacionais do ensino da matemática. (Pais, 2002, p. 10)

Para que esta investigação parta de uma base atual e possa produzir contributos sólidos, é importante analisar várias teorias da Educação Matemática. Com base na análise às teorias, foram selecionadas as que consideramos ser as mais adequadas para a nossa investigação. Uma vez selecionadas as teorias que irão guiar a investigação, fizemos uma análise mais profunda das mesmas. É um facto que a linguagem técnica utilizada

---

[5] Conclui, "Uma falta de atenção à teoria é caraterística da pesquisa dos estados unidos sobre aprendizagem e pensamento matemáticos" (p. 369). Embora eu esteja confiante de que uma pesquisa similar hoje revelaria muitos mais artigos nos quais haveria uma atenção séria à estrutura teórica, os Estados Unidos da América, sem dúvidas, ainda estão atrás da Europa em matéria de teorização séria em Educação Matemática. Afinal de contas os europeus empenham-se no estudo da Didática da Matemática, o que eles consideram tanto como uma ciência matemática como uma disciplina com direito próprio, ao passo que os americanos (pelo menos este) tendem a hesitar em conferir ambas qualidades à Educação Matemática." atenção às traduções

pelos especialistas da área é proveniente das distintas teorias existentes, esta constatação reforça a necessidade de, pelo menos, ter-se noção das teorias existentes, assim como da sua terminologia.

Teorias de investigação em Educação Matemática:

- Teoria dos Obstáculos epistemológicos de Bachellard;
- Teoria da Transposição Didática de Chevalard;
- Teoria dos Campos Concetuais de Vergnaud;
- Teoria das Situações Didáticas de Brousseau;
- Teoria do Contrato Didático também de Brousseau;
- Teoria da Engenharia Didática de Artigue;
- Teoria da Dialética-Ferramenta-Objeto de Regine Douady.

1.2.1 Teoria dos Obstáculos Epistemológicos de Gaston Bachelard

O conceito de obstáculo epistemológico surgiu na filosofia da ciência nos trabalhos de Bachelard. O autor foi o primeiro a interpretar a génese do conhecimento científico com base neste conceito:

> When we start looking for the psychological conditions in which scientific progress is made, we are soon convinced that the problem of scientific knowledge must be posed in terms of obstacles. This is not a matter of considering external obstacles, such as the complexity and transience of phenomena, or indeed of incriminating the weakness of the senses or of the human mind. It is at the very heart of the act of cognition that, by some kind of functional necessity, sluggishness and disturbances arise. It is in the act of cognition that we shall show causes of stagnation and even of regression; there too we shall discern causes of inertia that we shall call epistemological obstacles.[6] (Bachelard, 1938, p. 24).

Para Bachelard (1938), para que um conhecimento evolua de pré-científico para científico é necessário que haja rejeição de conhecimentos anteriores, processo que implica enfrentar um certo número de obstáculos. Os obstáculos referem-se a conhecimentos anteriores com os quais a pessoa está familiarizada, compreendendo-se assim o porquê da resistência das pessoas à instalação de novos conhecimentos.

---

[6] Quando começamos a olhar para as condições psicológicas nas quais o progresso científico acontece, rapidamente nos convencemos de que o problema do conhecimento científico deve ser colocado em termos de obstáculos. Não se trata de considerar obstáculos externos, tais como a complexidade e a transitoriedade dos fenómenos, ou mesmos incriminar a fraqueza dos sentidos ou da mente humana. É mesmo no cerne do acto de cognição que, através de algum tipo de necessidade funcional, a lentidão e o distúrbio surge. É no acto de cognição que mostraremos causas de estagnação e mesmo de regressão; lá também discerniremos causas de inércia as quais denominaremos obstáculos epistemológicos.

Segundo Bachelard (1938), na Matemática, a análise aos obstáculos deve ser feita com particular atenção, uma vez que, diferente do que acontece com as ciências experimentais, a sua evolução apresenta períodos de paragem e não apresenta períodos de erro.

> It will be seen how false rigour is a block to thought and how a first mathematical system can sometimes prevent a new system from being understood. We shall moreover restrict ourselves to making fairly elementary observations, for the sake of readability. To complete our task here, we would in addition need to study the formation of the mathematical mind from the same critical standpoint. This however will be undertaken in another book. This division is possible, we believe, because the growth of the mathematical mind is very different from that of the scientific mind as it strives to understand physical phenomena. Indeed, the history of mathematics is wonderfully regular. There are periods when it comes to a halt. There are though no periods of error. None of the arguments we are putting forward in this book has any bearing on mathematical knowledge. Our arguments here deal only with knowledge of the objective world.[7] (Bachelard, p. 32, 1938)

Segundo Bachelard (1938), obstáculos didáticos são conhecimentos já estáveis no intelecto do indivíduo e, pelo seu papel na aprendizagem, constituem motivo de grande interesse pedagógico. O conhecimento anterior estável no intelecto atua como força contrária à realização de uma nova aprendizagem, o que estagna a evolução do conhecimento. Para contornar a estagnação é necessário que haja uma rutura epistemológica com o conhecimento prévio detido pelo indivíduo.

Razões históricas, culturais e sociais estão na base dos obstáculos epistemológicos. Tais razões revelam-se pelas representações elaboradas pelo imaginário do sujeito cognitivo, bloqueando a evolução da aprendizagem. Desta maneira, é notória a importância de se entender como ocorre a reorganização intelectual de tal forma que o novo conhecimento entre em harmonia com o anterior. A utilidade da Teoria dos Obstáculos Epistemológicos é transversal aos cinco campos da Didática da Matemática.

1.2.2 Teoria da Transposição Didática de Yves Chevallard

Para Chevallard (1998), o processo de transposição didática refere-se à transformação que um objeto ou um corpo de conhecimento sofre do momento que é produzido, utilizado, selecionado e estruturado para ser ensinado até o momento em que ele é

[7] Será visto como o falso rigor é um obstáculo ao pensamento e como um primeiro sistema matemático pode, às vezes, impedir que um novo sistema seja compreendido. Além disso, restringir-nos-emos a fazer observações razoavelmente elementares, por uma questão de legibilidade. Para completar nossa tarefa aqui, precisaríamos, além disso, estudar a formação da mente matemática do mesmo ponto de vista crítico. Isso, no entanto, será realizado em outro livro. Esta divisão é possível, acreditamos, porque o crescimento da mente matemática é muito diferente do da mente científica, na medida em que se esforça para entender os fenômenos físicos. De fato, a história da matemática é maravilhosamente regular. Há períodos em que chega a hora de parar. Não há períodos de erro. Nenhum dos argumentos que estamos apresentando neste livro tem qualquer influência no conhecimento matemático. Nossos argumentos aqui lidam apenas com o conhecimento do mundo objetivo.

efetivamente ensinado numa escola. É um processo que transforma um objeto de saber a ensinar para um objeto ensinado. Esta teoria destaca o facto de que aquilo que é ensinado numa escola é oriundo de outras instituições, construído em práticas concretas e organizado em conjuntos particulares de objetos.

Pelo dito acima, facilmente nos apercebemos que esta teoria pode ser utilizada em todos os campos da Didática da Matemática já considerados. Ela pode ser utilizada no campo de aprendizagem, pois o aluno em atos de estudo de autodidatismo é parte ativa da transposição de objetos a aprender em objetos aprendidos. Pode ser utilizada no campo de atividade do professor, pois é a este que tradicionalmente cabe a tarefa de dirigir o processo de transformação do objeto a ensinar em objeto sabido. Pode ser utilizada no campo de desenvolvimento do currículo, pois é no currículo que se lista os objetos a saber (conteúdo), lista-se os objetos a serem sabidos (objetivos instrutivos e objetivos educativos), bem como lista-se vias para se sair de um ponto para o outro (metodologias, técnicas, procedimentos, meios e materiais). Pode ser utilizada no campo do contexto, pois o meio que nos envolve nas suas diversas dimensões — pessoal, familiar, académica e social — é permanentemente um objeto a saber. Pode ser utilizada no campo de atividade do investigador em Educação Matemática, pois trata-se de uma consagrada ferramenta a ter em conta no desenvolvimento de investigações.

Segundo Chevallard (1998, p. 45):

> Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los *objetos de enseñanza.* El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la *transposición didáctica*.[8]

A citação acima constitui uma consolidação da possibilidade de enquadramento da Teoria da Transposição Didática no campo de desenvolvimento curricular. É no âmbito do desenvolvimento curricular que se dá a seleção e a doseficação de conteúdos, partes importantes do processo de transformação do saber a aprender em saber aprendido.

1.2.3 Teoria dos Campos Concetuais de Gérard Vergnaud

A partir daqui, mas apenas dentro da Didática da Matemática Francesa, começamos a falar de teorias especificamente criadas para a investigação em Educação Matemática. As duas anteriores, embora muito úteis para a investigação em Educação Matemática, foram criadas para a Educação e posteriormente adaptadas à investigação em Educação Matemática.

---

[8] Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre um conjunto de transformações adaptativas, tornando-o apto a tomar lugar entre os “objetos de ensino”. O processo, que de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino é chamado de transposição didática.

Desde o início da Didática da Matemática francesa tem-se reivindicado fortemente o papel central do conteúdo matemático nas teorias, o que tem acontecido mesmo nas linhas de investigação mais centradas na concetualização dos alunos. Duas teorias que estiveram no início da existência oficial da comunidade francesa de Didática da Matemática ajudam-nos a compreender isto. A Teoria dos Campos Concetuais de Vergnaud e a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau. (Laborde, 2007)

Vergnaud (1981) considera que modelar o conhecimento do aluno sobre uma noção matemática faz sentido apenas quando se tem em conta os problemas matemáticos nos quais ele está envolvido. Para o teórico, modelar o conhecimento do aluno significa modelar a interação entre o problema e o aluno. Vergnaud (1981) afirma que a solução do problema é a fonte e o critério do saber.

Provavelmente influenciado pela Teoria das Situações Didáticas, Vergnaud substituiu a palavra “problema” pela palavra “situação”. Para o teórico, modelar o estado do conhecimento dos alunos e os seus processos pode ser feito apenas quando se faz referência ao subconjunto de problemas matemáticos dentro do conteúdo matemático a ser aprendido. (Laborde 2007).

A teoria tem como objeto a seleção adequada, em quantidade e qualidade, dos problemas indicados para a aprendizagem da Matemática, bem como a interação entre aluno e problemas. Um dos seus objetivos é o de estudar e promover as condições favoráveis para a compreensão das características essenciais dos conceitos pelo aluno.

> On appelle champ conceptuel un ensemble de situations dont le traitement implique des scheèmes, concepts et théorèmes, en étroite connexion, ainsi que des représentations langagières et symboliques susceptibles d’être utilisées pour les représenter.9 (Vergnaud, 1994, p. 65)

Segundo Vergnaud (1981), essa teoria foi criada tendo em vista respeitar uma estrutura progressiva de elaboração de conceitos, tendo assim, pertinência a sua aplicação à Matemática. Trata-se de procurar as possíveis filiações e ruturas entre as ideias iniciais da Matemática, levando em consideração as ações realizadas pelo aluno. Destaca-se nesta teoria o tratamento dado ao conhecimento escolar, aquele conhecimento que intermedeia o científico e o quotidiano. Os conceitos passam a ter um significado de natureza educacional, sem estar nem no patamar do conhecimento científico, caraterizado pela sua pureza, nem no patamar do conhecimento quotidiano, caraterizado pelo seu empirismo. O conhecimento é constituído e desenvolvido ao longo do tempo com a capacidade de adaptação e as experiências do indivíduo ao longo das interações

[9] Chama-se campo concetual a um conjunto de situações para as quais os processos de resolução implicam esquemas, conceitos em estreita ligação, bem como representações simbólicas e de linguagem suscetíveis de serem usadas para representá-las.

que vai tendo. O indivíduo desenvolve um conjunto de procedimentos de raciocínios que coordenam as adaptações necessárias para a sintetização de um novo conhecimento.

Nesta teoria concebe-se o conhecimento como sendo uma sucessão de adaptações que o aluno realiza como consequência da influência de situações que ele vivencia no ambiente escolar e no ambiente quotidiano extraescolar. Para que assim suceda, os espaços e as situações devem constituir problemas que proporcionam ao aluno a perceção das ligações entre os vários conceitos com que se depara e precisa de lidar.

1.2.4 Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau

À semelhança do que acontece com a Teoria dos Campos Concetuais de Vergnaud, a Teoria das Situações Didáticas é baseada em hipóteses de aprendizagem de natureza cognitiva ou em duas grandes teorias transversais, o construtivismo e o sócio-construtivismo. Ambas teorias têm como objetivo criar condições para melhorar o ensino e a aprendizagem da Matemática. Aquilo a que Vergnaud, na sua Teoria dos Campos Concetuais, chama de problemas, Brousseau chama de situação.

A Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1997) tem como objeto de estudo o funcionamento do conhecimento matemático e da situação. Nesta teoria o objeto não é a concetualização do aluno em relação aos problemas com que se depara, o objeto são as situações que o levam a aprender determinado conhecimento.

A teoria tem como objetivo identificar condições em situações com as quais confrontar o aluno, nas quais ele desenvolve atividades científicas que podem ser a fonte de construção de conhecimento, de aprendizagem. Aqui, aprendizagem é considerada como sendo resultante de uma adaptação a uma nova situação na qual o conhecimento prévio do aluno não lhe permite desenvolver uma estratégia de resolução eficiente. O aluno deve desenvolver novos meios de resolução que sejam a fonte de conhecimento matemático novo.

A maneira didática de apresentar um conteúdo ao aluno influencia significativamente o conhecimento construído por ele. Segundo Brousseau (1997), uma situação didática é um conjunto de relações explícita ou implicitamente estabelecidas entre um aluno ou um grupo de alunos, em determinado meio, eventualmente com instrumentos e objetos, com um professor, dentro de um sistema educativo, com a finalidade de possibilitar aos alunos um saber construído ou em vias de construção. O trabalho do aluno, pelo menos parcialmente, deve reproduzir caraterísticas do trabalho científico propriamente dito, o que reflete uma garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes.

Pelo exposto, facilmente constatamos que uma situação didática é um conjunto de relações pedagógicas entre o professor, os alunos e o conhecimento — no caso o matemático — que ocorre na sala de aula com o objetivo de desenvolver atividades direcionadas para o ensino e a aprendizagem de determinado conteúdo. A presença dos três elementos é condição indispensável para se considerar como uma situação didática, na falta de pelo menos um deles está-se em presença de uma situação de estudo. À situação didática, para sua melhor compreensão, são agregáveis outros elementos do sistema didático, nomeadamente objetivos, métodos, contributos teóricos e recursos didáticos.

Nesta teoria, o professor não se deve limitar a comunicar conhecimento, ele deve também fazer a devolução de bons problemas — entenda-se fazer a transferência da responsabilidade de resolução de exercícios para o aluno. A aceitação da responsabilidade por parte do aluno é sinónimo de início do processo de aprendizagem. Devolução é responsabilizar o aluno pela construção do seu próprio conhecimento. O autor da teoria, Guy Brousseau, apresenta-nos também o conceito de situações adidáticas, como sendo situações que também contribuem para a formação de conceitos sem estar sob controlo pedagógico do professor. Para o autor, esta noção permite compreender a interação entre o ambiente escolar e o espaço maior da vida. Nas situações adidáticas, o aluno trabalha de forma independente, não havendo uma intencionalidade pedagógica direta ou controlo didático feito pelo professor. A situação é adidática quando o aluno é capaz de colocar em funcionamento e utilizar por ele mesmo o conhecimento que está a construir em situações não previstas em qualquer contexto de ensino e na ausência do professor. Se às situações adidáticas retirarmos o objetivo de realizarmos aprendizagem e retirarmos também o planeamento, então estaremos diante de situações não didáticas. É importante notar que, apesar de não estar planificada para a aprendizagem, na situação não didática também se aprende. Tipos de situações didáticas: situações de ação, situações de formulação, situações de validação e situações de institucionalização. (Brousseau 2008).

1.2.5 Teoria do Contrato Didático de Guy Brousseau

A Teoria do Contrato Didático estuda as regras e as condições do funcionamento da educação escolar. Nos processos de ensino e de aprendizagem na sala de aula, a teoria refere-se às obrigações pontuais tanto do professor como do aluno. Apesar de ter surgido no ensino da Matemática, é uma teoria de aplicação transversal a outras disciplinas.

O conceito de contrato didático surgiu em 1980 durante um inquérito clínico e estatístico com alunos com dificuldades em Matemática (1975-1980), realizado pelo Centro de Observação e Pesquisas sobre o Ensino de Matemática (COREM) da Universidade de Bordeaux, como parte das suas pesquisas sobre situações matemáticas. Quais as obrigações mútuas, explícitas e implícitas que pais, alunos e professores exercem entre si? Elas são compatíveis? Qual é a legitimidade e a eficácia das medidas de que cada um deles acredita dispor? Essas questões surgem de forma crucial para a família e para os educadores de uma "criança com dificuldade", mas elas podem permanecer muito tempo ignoradas pelo restante da sociedade. (Brousseau, 2013)

Segundo Brousseau (1990), chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor. Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, o que cabe a cada parte integrante da relação didática em termos de gestão e prestação de contas.

O contrato didático difere do pedagógico por este se referir ao conjunto de regras de convivência dentro do recinto escolar, são regras explicitamente enunciadas. No contrato didático o que deve ser feito é percebido no fazer, na prática diária, e não no enunciado, não são escritas, não são faladas, as suas cláusulas são implícitas. O contrato didático diz respeito às cláusulas da construção do conhecimento do aluno, tais cláusulas, tanto para o professor como para o aluno, são percebidas no fazer, no enunciado (não enunciado de regras) de exercícios e de problemas. (Brousseau, 1997)

Paradoxos da Teoria do Contrato Didático, segundo Brousseau (1997): (1) paradoxo da devolução de situações; (2) paradox das situações de adaptação — (a) mau ajustamento a correção e (b) mau ajustamento a adaptação posterior —; (3) paradoxos da aprendizagem por adaptação — (a) negação de conhecimento e (b) destruição da sua causa —; (4) paradoxo do ator.

A noção de contrato didático está associada ao conceito de contrato social, de Jean-Jacques Rousseau (1712-1778), que "propõe uma forma de compreender as regras de funcionamento da sociedade e suas aplicações na educação" (Pais, 2002, p. 78).

Os contratos, infelizmente, também podem ser mal-colocados ou mal-entendidos. Isto ocorre quando há pouca abertura tanto do professor como dos alunos, podendo ser uma consequência do comportamento de ambos. Cabe ao professor maior responsabilidade na iniciativa de abertura. A presunção de ambos face ao comportamento de outrem contribui bastante para o surgimento de contratos mal-colocados ou mal-entendidos.

1.2.6 Teoria da Engenharia Didática de Michèle Artigue

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa que foi formulada com o objetivo de analisar situações didáticas — Nota-se aqui relação com a teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. Embora, conforme afirma Pais (2002), seja uma teoria que pode ter analogia com o trabalho de um engenheiro, no sentido da conceção, planeamento e execução de um projeto, ela não pode ser vista como um conjunto automatizado de repetições, mas sim em sentido pleno, o que envolve a gestão, ao longo de toda ela, de ideias e o seu reflexo em termos práticos. Para Machado (2002), Engenharia Didática pode ser vista como um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, ou seja, sobre a conceção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino.

Segundo a autora da teoria, Artigue (1996), a noção de Engenharia Didática surgiu na Didática da Matemática da comunidade académica francesa, no início da década de 80, com o objetivo de destacar uma forma de trabalho didático. A Engenharia Didática tem uma forma própria de organizar os procedimentos metodológicos da pesquisa, o que abarca, de maneira interligada, a dimensão teórica e a dimensão experimental. A interligação entre as dimensões teórica e experimental constitui-se numa vantagem desta metodologia.

Nesta teoria distinguem-se dois níveis de engenharia didática, o nível necessário e o complementar. O primeiro nível, também denominado microengenharia, é aquele em que o objeto de pesquisa de determinado estudo é um assunto. O segundo nível, também denominado macroengenharia, é o das pesquisas que permitem uma ligação entre a complexidade das pesquisas da microengenharia e os fenómenos ligados à duração nas relações de ensino e de aprendizagem. Quanto às fases metodológicas, a Engenharia Didática divide-se em quatro fases, nomeadamente análises preliminares, conceção e análise a priori das situações didáticas, a experimentação e análise a posteriori e validação (Artigue, 1996).

Fase de análises preliminares

Para Artigue (1996), esta fase é realizada através de considerações feitas sobre o quadro teórico-didático geral, bem como sobre conhecimentos didáticos anteriormente adquiridos. Nesta fase identifica-se as possíveis causas do problema assim como as possíveis formas do seu tratamento. A autora considera que a análise preliminar geralmente assenta nas seguintes situações:

- a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- a análise do ensino habitual e dos seus efeitos;
- a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
- a análise do campo de constrangimento no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;
- e, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação. (Artigue, 1996, p.198).

Fase de conceção e análise a priori das situações didáticas

Em consequência do trabalho feito na fase anterior, a autora define a direção do seu trabalho escolhendo as variáveis sobre as quais deverá atuar. Segundo Artigue (1996), para o sucesso desta fase, é importante distinguir dois tipos variáveis de comando:

- as variáveis macro-didáticas ou globais, que dizem respeito à organização global da engenharia;
- e as variáveis micro-didáticas ou locais, que dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase, podendo umas e outras ser, por sua vez, variáveis de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático cujo ensino é visado. (Artigue, 1996, p. 202)

Fase de experimentação

Esta fase é caraterizada por uma sequência de ações experimentais. Para Pais (2001), a referida sequência didática é formada num determinado número de aulas — também conhecidas por sessões — planificadas e analisadas previamente com o objetivo de constatar situações de aprendizagem sobre os conceitos na pesquisa. A execução da sequência permite também confirmar a proximidade dos resultados práticos à análise teórica.

Para Machado (1999), trata-se de uma fase da engenharia didática iniciada mediante contato do pesquisador/professor/observador (es) com a população de alunos — objetos do estudo. Tal fase implica:

- a explicitação dos objetos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
- o estabelecimento do contrato didático;
- a aplicação dos instrumentos de pesquisa;

- o registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc.). (Machado, 1999, p. 206).

Fase de análise a posteriori e validação

Segundo Artigue (1996), esta fase apoia-se nos dados recolhidos durante a fase de experimentação. Analisa-se a produção dos alunos, bem como as observações realizadas sobre o comportamento dos mesmos durante a execução da sequência didática e da experimentação. Para a autora, nesta fase, averigua-se o alcance das expetativas consideradas na fase de análises preliminares. Mediante a confrontação das análises preliminares e a posteriori valida-se, ou não, a hipótese de pesquisa.

Artigue (1996) indica algumas dificuldades existentes na fase de validação encontradas nos trabalhos publicados sobre engenharia didática:

- Na maior parte dos textos publicados relativos a engenharias, o confronto das duas análises, a priori e a posteriori, exibe distorções. Elas estão longe de ser sempre analisadas em termos de validação, a saber, investigando aquilo que, nas hipóteses consideradas, as distorções constatadas invalidam. Com grande freqüência, os autores limitam-se a propor modificações da engenharia, visando a sua redução, sem se envolverem, pois, verdadeiramente, num procedimento de validação.
- As próprias hipóteses explicitamente envolvidas nos trabalhos de engenharia são, com grande freqüência, hipóteses relativamente globais, que põem em jogo processos de aprendizagem a longo prazo, que a amplitude da engenharia não permite necessariamente fazer entrar, de facto, no procedimento de validação (Artigue, 1996, p. 209).

Pais (2001) refere que metodologicamente a validação faz parte de uma fase em que a vigilância deve ser reforçada, uma vez que se trata de certificar a existência do caráter científico. Assim sendo, a engenharia didática, enquanto procedimento metodológico, fundamenta-se em registos de estudos de caso, cuja validade é interna e permeia o contexto da investigação realizada.

1.2.7 Teoria da Dialética-Ferramenta-Objeto de Régine Douady

Esta é uma teoria que surge na sequência da anterior, a teoria da Engenharia Didática. Esta autora concebe a teoria da Dialética-Ferramenta-Objeto como instrumentos para a conceção, realização e análise das engenharias didáticas.

Segundo Maranhão (2010), São sete as fases consideradas por esta teoria: fase do antigo, fase de pesquisas, fase de explicitação, fase do novo implícito, fase de institucionalização do conhecimento, fase de reinvestimento e fase do novo problema.

- Fase do antigo: nesta fase o aluno utiliza os conhecimentos antigos, relacionados com a Matemática, como ferramentas para resolver problemas;
- Fase de pesquisas: diante de dificuldades na resolução de problemas, os alunos são conduzidos a colocar em prática novos conhecimentos que são implícitos;

- Fase de explicitação: aqui os alunos descrevem as dificuldades e os resultados obtidos no seu trabalho. Para tal, é importante que o professor crie um ambiente de abertura para debates sobre os conhecimentos antigos, os novos, assim como os que se vão criando ao longo do trabalho dos alunos;
- Fase do novo implícito: ao longo das resoluções, pela experiência que os alunos vão ganhando, tornam-se capazes de formular objetos de conhecimento matemático como conceitos, propriedades ou procedimentos. Tais objetos podem ser validados ou refutados, cabe ao professor criar um ambiente que permita aos alunos continuar a criar e a aprimorar os seus mecanismos de validação e refutação, numa só palavra averiguação, dos objetos matemáticos fruto da sua criatividade;
- Fase de institucionalização: para o alcance desta quinta fase é possível que seja necessário fazer-ser mais do que um ciclo das quatro fases anteriores. Nesta fase acontece a institucionalização dos conhecimentos validados em objetos matemáticos, nomeadamente definições, enunciados, conjeturas, teoremas, entre outros;
- Fase de reinvestimento: esta é uma fase de consolidação, o que se faz com resolução de vários exercícios. Aqui não se cria novos conhecimentos, são criadas apenas novas situações com intuito de consolidar os conhecimentos adquiridos de tal forma que, posteriormente, tais conhecimentos sejam tratados como antigos.
- Fase do novo problema: aqui os novos conhecimentos passam a ser reutilizados em tarefas mais complexas, utilizando outros conceitos, propriedades e procedimentos. Isto evidencia o despoletar de um novo ciclo. Assim, os conhecimentos novos tomam a condição de antigos a partir dos quais poder-se-á evoluir para novos conhecimentos.

Em 1986, na sua tese de doutoramento intitulada “Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l’enseignement des mathématiques”[10], pela primeira, vez Régine Douady apresentou os conceitos de “quadro”, “mudança de quadro” e de “jogo de quadros”. A autora considera a mudança de quadro como sendo a mudança de contexto muitas vezes necessária para resolver determinados problemas. Esta mudança pode ajudar a entender melhor determinado procedimento que o professor ou o investigador usa para resolver um problema.

Exemplo:

Considere a função: $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

[10] Jogo de quadros e dialética ferramenta-objeto no ensino da Matemática.

a) Determine o seu domínio;

b) Determine os seus pontos de descontinuidade, caso existam;

c) Classifique-os, sabendo que as descontinuidades podem ser do primeiro género (se os limites laterais no ponto considerado forem diferentes), do segundo género (se o limite no ponto considerado for infinito) e removível (se o limite for diferente da imagem no ponto considerado).

Fase 1, do antigo: considerando que os alunos sabem fazer a representação analítica do domínio de uma função, estamos diante de conhecimentos antigos que permitiram a resolução parcial do problema. Para resolução das alíneas b) e c), os alunos precisam de conhecimentos sobre continuidade de funções, o que estamos a considerar que não têm ainda, daí estarmos diante de um problema e não de um simples exercício.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

Sendo uma função racional, o procedimento passa por determinar os números reais que anulam o denominador.

$$x - 1 \neq 0$$

$$x \neq 1$$

$$\therefore D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$$

Fase 2, de pesquisas: o problema apresentado necessita de um novo objeto para ser resolvido, no caso necessita de conhecimentos sobre continuidade de funções que considerámos não ser ainda do conhecimento dos alunos. A amplicação do quadro analítico e a mudança para o quadro geométrico podem propiciar a ampliação dos conhecimentos antigos dos alunos, dando lugar à produção de novos conhecimentos. Na prática, o professor pode desencadear a referida ampliação de quadro orientando a seguinte atividade:

Represente na notação de intervalos o domínio da função dada.

O domínio $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$ em notação de intervalos é dado por $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. Com esta amplicação do quadro inicial, fica mais uma vez e mais evidente que na vizinhança do ponto $x = 1$ em todos os pontos da reta real a função tem imagem, apenas no próprio ponto não está definida a imagem da função.

O professor pode desencadear a mudança de quadro orientando a seguinte atividade:

Represente graficamente a função dada.

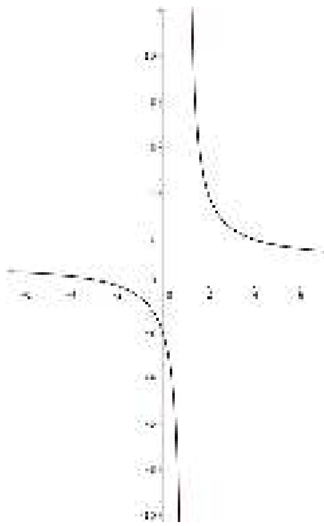


Figura 0.1 Gráfico da função $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

Nota-se que o gráfico da função sofre uma rutura, geometricamente fica claro que a função não tem imagem no ponto de rutura, no ponto $x = 1$. Em relação à alínea b), mais facilmente já se pode dizer que no ponto $x = 1$ a função é descontínua, pois nele o gráfico da função é descontinuado. O novo quadro mais facilmente permite resolver a alínea b) e introduzir o conceito de descontinuidade de uma função num ponto.

Fase 3, de explicitação: nesta fase faz-se institucionalização local, fazendo-se referência a constatações feitas no novo quadro considerado.

Depois de ouvidas e consideradas as dúvidas dos alunos, o professor, dentro do novo quadro, está em condições de explicar a noção de limites laterais, no caso calculados nas vizinhanças à esquerda e à direita do ponto $x = 1$. Com estes novos conhecimentos, agora sim, o professor pode introduzir o conceito de continuidade de uma função num ponto, dizendo que uma função é contínua no ponto de abscissa $x = a$ se $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$, ou seja, se a imagem e o limite no ponto considerado existirem e forem iguais.

Fase 4, do novo implícito: nesta fase consolida-se o conceito apresentado na fase anterior. Aprofunda-se o diálogo entre o professor e os alunos através da resolução da alínea c) e da apresentação de novos exemplos por aquele e da resolução dos mesmos por todos.

Fase 5, de institucionalização: depois de introduzida e formulada a “nova” propriedade, esta deve ser utilizada como ferramenta na resolução de novos problemas. Para tal, institucionaliza-se e enuncia-se o novo conhecimento.

Definição: $f(x)$ é contínua num ponto $x = a$ do seu domínio quando $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$. Quando $f(x)$ é contínua em cada ponto do seu domínio, diz-se simplesmente que é contínua.

Classificação das descontinuidades:

- Quando os limites laterais da função no ponto considerado existem, mas são distintos, chama-se descontinuidade do primeiro género;
- Quanto o limite é infinito, chama-se descontinuidade do segundo género;
- Quando o limite existe e é diferente da imagem, chama-se descontinuidade removível ou evitável.

Fase 6, de reinvestimento: institucionalizado que está o novo conhecimento reutiliza-se o mesmo noutros problemas mais complexos.

Fase 7, do novo problema: aqui começa um novo ciclo em que os conhecimentos recém-institucionalizados passam a ser antigos e a servir de base para o surgimento de novos conhecimentos.

No exemplo apresentado acima nota-se a influência da mudança de contexto na aprendizagem do aluno. Importa realçar a mudança da representação analítica para a geométrica da função, o que certamente proporciona ao aluno uma visão diferente, mais abrangente, do assunto abordado.

1.2.8 Comparação entre as teorias

Na Tabela 1 seguinte encontra-se uma síntese dos objetos de estudo de maior incidência das teorias de investigação em Educação Matemática.

Tabela 1: Comparação das teorias de investigação em Educação Matemática em função do seu objeto

Teorias	**Objeto**	
Teoria dos Obstáculos epistemológicos de Gaston Bachellard	Conflito entre conhecimento antigo e conhecimento novo	Planeamento de aula
Teoria da Transposição Didática de Yves Chevallard	Processo de transformação do saber a ensinar para saber ensinado	
Teoria dos Campos Concetuais de Gérard Vergnaud	Adaptações que o aluno realiza sob a influência de situações que este vivencia dentro e fora da escola	
Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau	Forma com que podemos conceber e apresentar o conteúdo matemático ao aluno	
Teoria do Contrato Didático também de Guy Brousseau	O conjunto de comportamentos que, não ditos, professores, alunos e pais esperam entre si. Expetativas recíprocas	
Teoria da Engenharia Didática de Michèle Artigue	Planeamento e execução de aulas	
Teoria da Dialética-Ferramenta-Objeto de Régine Douady	Elementos teóricos usados como instrumentos para a conceção, realização e análise das engenharias didáticas.	

Na Tabela 1 sintetiza-se as Teorias de Investigação em Educação Matemática. Tal síntese é importante pois permite ao leitor rapidamente ter uma noção do que aborda cada uma das teorias, assim como notar alguma ligação entre os objetos de estudo das mesmas. As teorias acima foram estudadas ao longo da revisão de literatura desta tese com o objetivo de se reunir um leque de perspetivas sobre a aprendizagem da Matemática que melhor sustentariam opções e abordagens seguintes da investigação.

Tabela 2: Comparação das teorias de investigação em Educação Matemática em função dos campos da Didática da Matemática em Portugal

<table>
<tr><th>Teorias de investigação em Educação Matemática</th><th colspan="2">Campo da Didática da Matemática</th></tr>
<tr><td>Teoria dos Obstáculos epistemológicos de Gaston Bachellard</td><td>Aprendizagem do aluno</td><td rowspan="7">Atividade do investigador em Educação Matemática</td></tr>
<tr><td>Teoria da Transposição Didática de Yves Chevalard</td><td>Desenvolvimento curricular</td></tr>
<tr><td>Teoria dos Campos Concetuais de Gérard Vergnaud</td><td>Aprendizagem do aluno</td></tr>
<tr><td>Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau</td><td>Contexto de aprendizagem</td></tr>
<tr><td>Teoria do Contrato Didático também de Guy Brousseau</td><td>Contexto de aprendizagem</td></tr>
<tr><td>Teoria da Engenharia Didática de Michèle Artigue</td><td>Atividade do professor</td></tr>
<tr><td>Teoria da Dialética-Ferramenta-Objeto de Régine Douady</td><td>Atividade do professor</td></tr>
</table>

Na tabela anterior (Tabela 2) encontra-se o enquadramento das teorias de investigação em Educação Matemática nos campos da Didática da Matemática. Para além dos campos diretamente indicados na tabela, todas as teorias, simultaneamente, enquadram-se no campo atividade do investigador em Educação Matemática. O enquadramento nos campos é predominante e não absoluto, ou seja, é o foco maior da teoria nos campos da Didática da Matemática. Temos, deste modo, ligações entre teorias de investigação em Educação Matemática e campos de atuação da Didática da Matemática. É uma relação pertinente na medida em que contribui na seleção que o investigador em Educação Matemática faz de teorias para utilizar no seu trabalho.

1.3 Teorias da aprendizagem

Considera-se teorias de aprendizagem, em Psicologia e em Educação, os diversos modelos que visam explicar o processo de aprendizagem dos indivíduos. Apesar de na Grécia antiga se ter formulado diversas teorias sobre aprendizagem, as de maior destaque na Educação contemporânea são a de Jean Piaget e a de Lev Vygotsky, respetivamente, construtivismo cognitivista e construtivismo sociointeracionista. Por ter mais relação com o estudo aqui feito, nas secções seguintes faremos apenas o desenvolvimento das teorias construtivistas.

Ao longo de vários anos foram surgindo muitas teorias da aprendizagem com vários percursores. Tais teorias enriqueceram bastante as Ciências da Educação tanto pela quantidade como pela qualidade dos seus contributos. De tantos que são os contributos, mesmo entre os especialistas existe alguma dificuldade em reconhecer as fronteiras entre as teorias. Assim, estando a aprendizagem no centro deste estudo, entendemos incluir nele considerações sobre as teorias de aprendizagem. A partir de leituras feitas no âmbito da revisão de literatura, pudemos construir a Tabela 3 e classificar as teorias de aprendizagem nos seguintes grupos:

1. Empirismo;
2. Racionalismo;
3. Humanismo;
4. Teoria da aprendizagem significativa;
5. Gestaltismo;
6. Teoria socio-afetiva;
7. Conectivismo.

É comum a todas as teorias a necessidade de conhecimento prévio à aprendizagem, quer seja inato, quer seja adquirido ao longo da vida. Mesmo no conectivismo, para o indivíduo ter a capacidade de acionar o conhecimento fora da sua mente precisa de ser capaz de fazê-lo, isto pressupõe ter conhecimento. A seguir apresenta-se uma tabela que sintetiza as especificidades das teorias da aprendizagem.

Tabela 3: Comparação entre teorias da aprendizagem

Grupo/corrente	Teorias		Incidência da teoria		Percursores	
Empirismo	Behaviorismo	Condicionamento clássico	comportamento	Reflexos condicionados	- Ivan Pavlov (1849-1936)	- John Locke (1632–1704) - David Hume (1711-1776)
		Condicionamento operante		Recompensa vs esforço	- Burrhus Frederic Skinner (1904-1990)	
		Tentativa e erro		Resolução de problema	- Edward Lee Thorndike (1874-1949)	
	Conexionismo		Associação de conhecimentos a imagens. Associação de conteúdos num hemisfério do cérebro ao outro		Santiago Ramón y Cajal (1852-1934)	
Racionalismo	Inatismo		Pressuposto de que o indivíduo já nasce com conhecimento. Formas de aceder a tal conhecimento		Platão, Descarte, Espinoza e Leibniz	- René Descarte (1596-1650)
	Construtivismo	cognitivista	Interação entre o indivíduo e o meio à sua volta		- Jean William Fritz Piaget (1896-1980)	
		interacionista	Interação entre o indivíduo e o meio à sua volta mediada por terceiros		- Lev Semenovitch Vigotsky (1896-1934)	
Humanismo			Empoderamento do indivíduo com condições necessárias para aprendizagem. Motivação do indivíduo		- Abraham Maslow (1908-1970) - Carl Rogers (1902-1987)	
Aprendizagem significativa			Relação entre conteúdos novos e conhecimento anterior do indivíduo		- David Paul Ausubel (1918-2008)	
Gestaltismo			Perceção entre estímulo e resposta. O que se percebe e como se percebe determina a resposta		- Friederich Salomon Perls (Fritz Perls) (1893-1970)	
Teoria socio-afetiva			Formação integral da criança. Inteligência, movimento, afetividade e construção do eu		- Henri Wallon (1879-1962)	
Conectivismo			Efeito das TIC na comunicação e na aprendizagem		- George Siemens (1964 -) - Stephen Downes (1959 -)	

1.3.1 Construtivismo

No construtivismo defende-se que o conhecimento é construído em ambientes naturais de interação social, ambientes estruturados culturalmente. Segundo esta corrente, cada aluno constrói o seu próprio conhecimento num processo de dentro para fora baseado em experiências com bases psicológicas. Aqui os teóricos esforçam-se por explicar o comportamento humano de um ponto de vista em que o sujeito e o objeto interagem num processo que resulta em sucessivas construções e reconstruções de estruturas cognitivas. Trata-se do construtivismo de estratégia historicista que, superando as visões empirista e inatista, refere que o conhecimento resulta da interação do indivíduo com o ambiente, como se vê na citação seguinte:

> As estruturas do pensamento, do julgamento e da argumentação dos sujeitos não são impostas às crianças, de fora, como acontece no behaviorismo… também não são consideradas inatas como se fossem uma dádiva da natureza. A concepção defendida por Piaget e pelos pós-piagetianos é que essas estruturas são o resultado de uma construção realizada por parte da criança em longas etapas de reflexão, de remanejamento. Poderíamos dizer que essas estruturas resultam da ação da criança sobre o mundo e da interação da criança com seus pares e interlocutores. (Freitag, 1993, p. 27)

Fazendo alusão à diferença entre a sala de aula tradicional e a sala de aula construtivista, Bada (2015) evidencia diferenças entre a abordagem construtivista e as abordagens empirista e inatista na sala de aula. O autor fala da mudança de foco do professor para o aluno e da assunção de papel de facilitador por aquele, fala da condição ativa do aluno, assim como da forma como é visto o conhecimento.

> In the constructivist classroom, the focus tends to shift from the teacher to the students. The classroom is no longer a place where the teacher ("expert") pours knowledge into passive students, who wait like empty vessels to be filled. In the constructivist model, the students are urged to be actively involved in their own process of learning. The teacher functions more as a facilitator who coaches, mediates, prompts, and helps students develop and assess their understanding, and thereby their learning. And, in the constructivist classroom, both teacher and students think of knowledge not as inert factoids to be memorized, but as a dynamic, ever-changing view of the world we live in and the ability to successfully stretch and explore that view.[11] (Bada, 2015, p. 68)

O mesmo autor sintetiza na tabela seguinte uma comparação entre a sala de aula tradicional e a construtivista.

Tabela 4: Sala de aula tradicional versus sala de aula construtivista (Bada, 2015, pp. 68, 69)

---

[11] Na sala de aula construtivista, o foco tende a mudar do professor para os alunos. A sala de aula já não é um lugar onde o professor (“perito”) despeja conhecimento em alunos passivos que, como vasos vazios, esperam para serem cheios. No modelo construtivista, os alunos são instados a estar ativamente envolvidos no processo da sua aprendizagem. O professor funciona mais como uma facilitador que treina, media, prontifica-se e ajuda os alunos a desenvolver a aceder ao seu entendimento e, consequentemente, sua aprendizagem. E, na sala de aula construtivista, tanto o professor como os alunos pensam no conhecimento não como factos inertes a serem memorizados, mas como uma visão dinâmica e em constante mutação do mundo em que vivemos e como a habilidade de ampliar e explorar com sucesso esta visão.

Sala de aula tradicional	Sala de aula construtivista
O curriculum começa com as partes do todo. Enfatiza habilidades básicas.	O curriculum enfatiza grandes conceitos, começando com o todo e expandindo para incluir as partes
A adesão restrita a curriculum fixo é altamente valorizada	A pesquisa das questões e interesses dos alunos é valorizada
Os materiais são primeiramente livros de texto e livros de atividades	Os materiais incluem fontes primárias e materiais manipulativos
A aprendizagem é baseada na repetição	A aprendizagem é interativa, construída sobre aquilo que o aluno já conhece
Os professores disseminam informação aos alunos; os alunos são recipientes de conhecimento	Os professores mantêm um diálogo com os alunos, ajudando-os a construir o seu próprio conhecimento
O papel dos professores é diretivo, assente na autoridade	O papel dos professores é interativo, assente na negociação
A avaliação é feita através de testagem, correção de respostas	A avaliação inclui os trabalhos do aluno, observação e os seus pontos de vista, assim como testes. O processo é tão importante quanto o produto
O conhecimento é visto como sendo inerte	O conhecimento é visto como dinâmico, em constante mutação com as nossas experiências
Os alunos trabalham primeiramente sós	Os alunos trabalham primeiramente em grupos

Para Chung (1991), um ambiente de aprendizagem construtivista é caraterizado por (1) conhecimento partilhado entre professores e alunos; (2) partilha de autoridade entre professores e alunos; (3) o papel do professor é de facilitador ou de guia; (4) os grupos de aprendizagem são constituídos de alunos heterogéneos.

O construtivismo desdobra-se em duas correntes bastante conhecidas, a cognitivista e a sociointeracionista, defendidas por Jean Piaget e por Lev Vygotsky, respetivamente. Para Vygotsky (1986), o sujeito é um ser eminentemente social e o conhecimento é um produto da atividade social. Defende que a comunicação, a linguagem, o raciocínio, entre outros, enquanto processos psicológicos, são adquiridos no contexto social e, posteriormente, são interiorizados. Piaget (1974), no quadro do que teorizou como Epistemologia Genética, defende que desde o nascimento o indivíduo constrói conhecimento. Dentre as teorias construtivistas cognitivistas esta é a mais conhecida. O autor defende que o professor deve ter um papel mais de espetador e criador do ambiente de desenvolvimento autónomo de conceitos do que como agente que pode intervir de maneira ativa na assimilação do conhecimento.

1.3.2 Construtivismo Cognitivista

Em termos epistemológicos, na procura da gênese da inteligência, Jean Piaget, autor da presente teoria, trabalhou arduamente até aos 85 anos, idade com que faleceu.

São bastante expressivos os números da sua produção científica: cerca de 70 livros e mais de 400 artigos.

Jean Piaget, biólogo de formação, investigou sobre o desenvolvimento do conhecimento nos seres humanos, ou seja, estudo dos mecanismos utilizados na formação do conhecimento lógico, da gênese e da evolução do conhecimento humano. O conhecimento passa pela noção de espaço, de tempo, de ente, relação de causalidade, entre outras noções.

Ao contrário do que acontece no inatismo, outra teoria racionalista, aqui Piaget (1974) defende que o comportamento dos seres vivos não é inato nem é, ao contrário do que acontece nas correntes behavioristas, resultado de condicionamentos. O autor da teoria defende que o comportamento é fruto da interação entre o meio e o indivíduo. Defende que o desenvolvimento do comportamento humano é uma construção que resulta da relação estabelecida entre o indivíduo e o meio em que se insere. A capacidade de o indivíduo se adaptar a situações novas é consequência das interações que o mesmo faz com o ambiente, quanto mais complexa a interação pela qual o indivíduo passar maior a sua capacidade de enfrentar novas interações e, também, maior a sua inteligência. Assim, gradualmente o indivíduo supera o seu conhecimento.

Para o construtivismo cognitivista, o indivíduo só absorve um determinado conhecimento se estiver preparado para absorvê-lo, quer dizer, só o absorve se estiver em condições de agir sobre os entes de conhecimento do seu meio de modo a inseri-los num sistema de relações. Não se forma conhecimento na ausência de conhecimento anterior que garanta a sua assimilação e ou transformação. As primeiras formações de conhecimento do indivíduo são sustentadas pela estrutura hereditária previamente constituídas, estas formações de conhecimento passam por representações básicas que, à medida que se vão relacionando entre si e à medida que o indivíduo se vai desenvolvendo, amplia-se e proporciona a absorção de novos conhecimentos, dando origem a sistemas de conhecimentos mais complexos e peculiares. Piaget constatou, assim, que existe o construtivismo sequencial, ou seja, que a construção da inteligência passa por etapas ou estádios que se sucedem, progressivamente complexos, relacionados uns com os outros. Dito de outra maneira, para o autor, construtivismo sequencial é o desenvolvimento da inteligência num sistema crescentemente complexo, onde cada estádio — etapa de desenvolvimento em que o indivíduo apresenta determinado leque de características — é resultante do anterior e o primeiro resultante da estrutura hereditária previamente constituída (Piaget, 1974).

Estádios de desenvolvimento genético-cognitivo da criança postulados por Piaget (1974):

- Sensório-motor (0 a 2 anos);
- Pré-operatório (2 a 7 anos);
- Operatório concreto (7 a 12 anos);
- Operatório lógico-formal (12 a 16 anos).

1.3.2.1 Conceitos da teoria

Assimilação e acomodação

O conceito de estrutura cognitiva é central para a teoria de Piaget. Segundo Piaget (1974) estruturas cognitivas são padrões de ação física e mental subjacentes a atos específicos de inteligência e correspondem a estágios do desenvolvimento infantil.

Para Piaget (1974), assimilação é uma integração de novo conhecimento em estruturas prévias — provocando modificação ou não, sem descontinuidade em relação ao estado precedente —, acomodando estas à nova situação.

A assimilação e a acomodação são dois processos muito aflorados por Piaget. Para o autor, assimilação significa integrar elementos externos (dados percetuais, motores, concetuais ou proposicionais) na estrutura mental do indivíduo. Assimilação é como os seres humanos percebem e adaptam-se a novas informações. É o processo de encaixar novas informações em esquemas cognitivos pré-existentes. Assimilação é o processo no qual novas experiências são reinterpretadas de modo a se encaixarem em ideias antigas. Ocorre quando os seres humanos se deparam com informação nova ou com a qual não estão familiarizados e, na tentativa de buscar sentido, recorrem a informação aprendida previamente.

A título de exemplo, consideremos um aluno que até ao presente momento tenha aprendido apenas equações lineares. Isto significa que o aluno, na sua estrutura cognitiva, tem esquemas de equações lineares. Quando apresentadas a este aluno equações não lineares, consideremos para o caso equações do segundo grau, tendencialmente e em função das semelhanças — ambas são igualdades, ambas têm um membro esquerdo e um membro direito, ambas têm uma incógnita que aparece pelo menos uma vez —, o aluno encara a equação do segundo grau como se de uma equação linear se tratasse. A distinção entre ambos tipos de equações, do primeiro grau e do segundo grau, ocorrerá mediante um processo denominado acomodação. Para tal, diante da manifestação de confusão por parte do aluno, o professor deverá intervir apresentando-lhe o novo conceito. A partir daí o aluno passará a ter uma nova estrutura cognitiva e, consequentemente, um novo esquema.

Agora o aluno passa a ter mais um esquema, para além do esquema para equação do primeiro grau, agora também tem o esquema para equação do segundo grau. Para Piaget, entende-se por acomodação toda a modificação dos esquemas de assimilação sob influência de situações exteriores, ou seja, do meio em que se insere o indivíduo. Ela tem lugar quando, em função das particularidades que a compõem, uma nova informação ou um novo estímulo não é assimilado pelo indivíduo, levando-o a criar um novo esquema ou a modificar um previamente existente, o que, em qualquer dos dois casos, resulta em mudança na estrutura cognitiva.

A assimilação, associada a crescimento e a mudança quantitativa, e a acomodação, associada a desenvolvimento e a mudança qualitativa, constituem a adaptação intelectual e o desenvolvimento das estruturas cognitivas. Na assimilação o esforço mental é feito no sentido de ajustar a informação ou o estímulo à estrutura cognitiva do indivíduo, já na acomodação o esforço mental é feito no sentido de ajustar a estrutura cognitiva à informação ou ao estímulo com que o indivíduo se depara.

Segundo Piaget (idem), a acomodação é o processo de, diante de nova informação, alterar esquemas pré-existentes para encaixar a nova informação. Ela acontece quando o esquema existente não funciona adequadamente e, consequentemente, carece de mudança para lidar com a nova informação. A acomodação é incontornável porquanto consiste na forma pela qual as pessoas continuam a interpretar novos conceitos, novos esquemas, novas estruturas, em suma, novas situações. Através da assimilação e da acomodação o cérebro humano reequilibra-se depois de o equilíbrio ter sido abalado por uma situação nova.

Para Piaget (idem), assimilação e acomodação devem sempre coexistir. Para o autor são dois processos indissociáveis. A assimilação de um objeto num esquema mental é precedida da acomodação a certa medida das particularidades do objeto. Por exemplo, para reconhecer (ou seja, assimilar) um copo, o indivíduo deve-se primeiro focar (ou seja, acomodar) nos contornos do objeto. Para tal, o indivíduo precisa de reconhecer (ou seja, assimilar) o tamanho do objeto e, assim, se vai desenrolando a dependência entre assimilação e acomodação. Não existe assimilação sem acomodação e não existe acomodação sem assimilação.

À medida que o indivíduo vai-se desenvolvendo, melhora a capacidade de equilibrar os processos de assimilação e acomodação. Quando ambos estão equilibrados, desencadeiam esquemas da inteligência operativa. Por outro lado, quando um processo domina o outro, desencadeiam representações pertencentes à inteligência figurativa.

Adaptação

Para Piaget (1986) é um processo dinâmico e contínuo mediante o qual, procurando continuamente reconstituir-se e reequilibrar-se, a estrutura hereditária do organismo interage com o meio externo. Deste modo, é um processo que se encontra na essência do funcionamento intelectual e biológico. O indivíduo modifica o meio e este modifica o indivíduo. Este facto produz continuamente desequilíbrios e desajustes na estrutura do indivíduo através da ocorrência de dois processos distintos, porém, dissociáveis: a assimilação e a acomodação. Daí o caráter dinâmico e contínuo da adaptação, não por opção, mas sim por necessidade.

Organização

Segundo o autor (idem) não se produz adaptação, portanto procura contínua de equilíbrio entre a assimilação e a acomodação, a partir de uma fonte desorganizada. A adaptação é sustentada por uma organização inicial expressa no esquema — origem da ação que o indivíduo empreende sobre os objetos do conhecimento. O pensamento, que consiste na interiorização da ação, organiza-se através da constituição de esquemas que se formam pelo processo de adaptação. Portanto, a adaptação e a organização são processos indissolúveis do pensamento.

Esquema

Para o autor (idem) trata-se do modelo de atividade utilizado pelo organismo para incorporar os estímulos que recebe pelos seus órgãos do sentido do meio à sua volta. Os primeiros esquemas do indivíduo, que são inatos, são os reflexos. A partir deles cria-se novos esquemas que dão lugar ao surgimento sucessivo de mais esquemas e, consequentemente, melhoram a capacidade de interação do indivíduo com o meio à sua volta.

O processo contínuo de adaptação resulta na produção, pelo indivíduo, de novos esquemas ou na evolução dos esquemas pré-existentes. Desta forma e parafraseando Wadsworth (1989), os esquemas são estruturas mentais ou cognitivas através das quais os indivíduos intelectualmente adaptam-se e organizam o meio à sua volta. Os esquemas constituem-se, assim, em processos dentro do sistema nervoso e em objetos, ou seja, trata-se de um fenómeno dinâmico e não estático. Os esquemas são construtos hipotéticos, ou seja, são inferidos e não são observáveis.

1.3.3 Construtivismo Interacionista

Para Lev Vygotsky e seus seguidores, a interação com os outros e com o meio em que estamos inseridos são os factores principais que desencadeiam o desenvolvimento socio-cognitivo. Os mesmos defendem que o desenvolvimento é impulsionado pela linguagem, reconhecem a estrutura dos estádios apresentada por Piaget, no entanto, propõem uma outra conceção da dinâmica evolutiva. Para Jófili (2002), as teorias de Piaget e de Vygotsky diferem em três aspetos: (1) desenvolvimento versus aprendizagem: Piaget defende que o desenvolvimento precede a aprendizagem ao passo que Vygotsky defende que a aprendizagem pode e deve anteceder o desenvolvimento; (2) interação social versus interação com os objetos: enquanto Piaget enfatiza a interação com os objetos, Vygotsky enfatiza a interação social. Nesta interação, Vygotsky introduz os conceitos das zonas de desenvolvimento — Zona de Desenvolvimento Real, Zona de Desenvolvimento Proximal e Zona de Desenvolvimento Potencial; (3) interação horizontal versus interação vertical: Vygotsky dá maior ênfase à interação do aluno com os seus pares — horizontal —, ao passo que Piaget dá maior ênfase à interação do aluno com o professor — vertical — como mediador da sua interação com objetos.

Segundo Kozulin et al. (2003), a abordagem de três questões atuais torna, consequentemente, a teoria de Vygotsky atual apesar de ter surgido na primeira metade do século XX. As questões referem-se a: (1) multiculturalismo; (2) mediação; (3) potencial de aprendizagem.

Multiculturalismo

> The issues of culture and learning have been inseparable for centuries for the simple reason that one of the main goals of learning is the transmission of culture from generation to generation. Nevertheless, the majority of educators were oblivious of this cultural element until confronted with it in the reality of the multicultural classroom. In a monocultural environment culture remains mostly invisible, and educators start paying attention to it only when two or more cultural patterns are empirically present in the same classroom at the same time. One may say that Vygotsky had a certain advantage in this respect because he worked in a period of great social upheaval that put different social and ethnic groups into the same educational focus. The issues of literacy, as well as ethnic and cultural diversity, were much more obvious for Vygotsky and his colleagues than for their Western contemporaries. Half a century later the same issues became a focal point in many Western classrooms.[12] (Kozulin et al., 2003, p. 15)

---

[12] As questões de cultura e de aprendizagem têm sido inseparáveis há séculos, pelo simples motivo de que um dos principais objetivos da aprendizagem é a transmissão da cultura de geração para geração. No entanto, a maioria dos educadores estavam alheios a este elemento cultural até serem confrontados com ele na realidade da sala de aula multicultural. Num ambiente monocultural, a cultura permanece na sua maioria invisível e os educadores começam a prestar atenção nela somente quando dois ou mais padrões culturais estão empiricamente presentes na mesma sala de aula ao mesmo tempo. Pode-se dizer que Vygotsky teve uma certa vantagem a este respeito porque

> Vygotsky's tentative answer to this challenge lies in his radical reorientation of learning theory from an individualistic to a sociocultural perspective. The key concept in this new orientation is that of psychological tools. Psychological tools are those symbolic artifacts — signs, symbols, texts, formulae, graphic organizers — that when internalized help individuals master their own natural psychological functions of perception, memory, attention, and so on (see Kozulin, 1998). Each culture has its own set of psychological tools and situations in which these tools are appropriated. Literacy in its different forms constitutes one of the most powerful of psychological tools.[13] (idem)

Nota-se que as descobertas de Vygotsky foram, em boa medida, fruto das influências do contexto em que estava inserido. A abordagem sobre multiculturalismo é de grande importância porquanto remete-nos à necessidade de atendermos às peculiaridades de cada aluno na sala de aula sob pena de os professores pouco ou nada comunicarem na tentativa de transmitirem os seus conhecimentos na sala de aula.

Mediação

> For a long time the predominant model of learning was that of acquisition (see Sfard, 1998). Children were perceived as containers that must be filled with knowledge and skills by teachers. The major disagreement among educators related to the degree of activity expected of the child. More traditional approaches portrayed the child as a rather passive recipient of prepackaged knowledge, whereas Piagetians and the proponents of discovery learning expected children to be independent agents of acquisition. In time it became clear that the acquisition model is wanting both theoretically and empirically. On the one hand, the child proved to be much more than a passive recipient of information; on the other hand, independent exploration often led to the acquisition of immature concepts and neglect of important school skills. A search for an alternative learning model moved to the fore such concepts as mediation, scaffolding, apprenticeship, and organization of learning activities.[14] (Kozulin et al., 2003, p. 16)

---

trabalhou em um período de grande agitação social que colocou diferentes grupos sociais e étnicos no mesmo foco educacional. As questões da alfabetização, bem como a diversidade étnica e cultural, eram muito mais óbvias para Vygotsky e seus colegas do que para os contemporâneos ocidentais. Meio século mais tarde, os mesmos problemas se tornaram um ponto focal em muitas salas de aula ocidentais.

[13] A tentativa de resposta de Vygotsky a este desafio reside na reorientação radical da teoria da aprendizagem de uma perspectiva individualista para uma sociocultural. O conceito-chave nesta nova orientação é o de ferramentas psicológicas. As ferramentas psicológicas são artefatos simbólicos — sinais, símbolos, textos, fórmulas, organizadores gráficos — que, quando internados, ajudam os indivíduos a dominar suas próprias funções psicológicas naturais de perceção, memória, atenção, etc. (ver Kozulin, 1998). Cada cultura tem seu próprio conjunto de ferramentas psicológicas e situações em que essas ferramentas são apropriadas. A alfabetização em suas diferentes formas constitui uma das mais poderosas ferramentas psicológicas.

[14] Durante muito tempo, o modelo predominante de aprendizagem foi o de aquisição (ver Sfard, 1998). As crianças eram percebidas como recipientes que devem ser enchidos com conhecimentos e habilidades pelos professores. O maior desacordo entre os educadores diz respeito ao grau de atividade esperado da criança. As abordagens mais tradicionais retrataram a criança como um destinatário bastante passivo do conhecimento pré-embalado, enquanto

> Vygotskian theory stipulates that the development of the child's higher mental processes depends on the presence of mediating agents in the child's interaction with the environment. Vygotsky himself primarily emphasized symbolic tools–mediators appropriated by children in the context of particular sociocultural activities, the most important of which he considered to be formal education. Russian students of Vygotsky researched two additional types of mediation – mediation through another human being and mediation in a form of organized learning activity. Thus the acquisition model became transformed into a mediation model (...).[15] (Kozulin et al., 2003, p. 17)

Quanto à mediação, a teoria de Vygotsky ressalta que o seu modelo de aquisição de conhecimento é mediado, sendo feito de duas formas: mediação através de um outro ser humano e mediação através de atividade de aprendizagem organizada. A teoria chama atenção para o risco de se fazer uma aprendizagem sem mediação, o que pode levar à aquisição de conceitos imaturos e à negligência de habilidades importantes.

Potencial de aprendizagem

> The history of intelligence testing carries in itself an inherent paradox. On the one hand, one of the most importante aspects of intelligence testing is its ability to predict the future performance of the child. On the other hand, the educational system that from the very beginning has been the major customer of psychometric testing aims at discovering and realizing children's learning potential, that is, their ability to change under the influence of instruction. The disparity between the stable psychometric properties of intelligence quotient (IQ) testing and the dynamic nature of a child's learning ability revealed itself in a number of IQ controversies. Gradually, alternative systems of dynamic assessment have emerged (Lidz, 1987; Sternberg & Grigorenko, 2002). What United all these systems was the introduction of the learning phase into the assessment situation. Instead of studying the child's individual performance, dynamic assessment focuses on the difference between performance before and that after the learning or assistance phase.[16] (idem)

---

piagetianos e os proponentes do aprendizado de descobertas esperavam que as crianças fossem agentes independentes de aquisição. Com o tempo ficou claro que o modelo de aquisição quer-se teorica e empiricamente. Por um lado, a criança provou ser muito mais do que um destinatário passivo de informações; Por outro lado, a exploração independente muitas vezes levou à aquisição de conceitos imaturos e à negligência de habilidades importantes da escola. A procura por um modelo de aprendizagem alternativo moveu para a frente conceitos como mediação, andaimes, aprendizado e organização de atividades de aprendizagem.

[15] A teoria de Vygotsky estipula que o desenvolvimento dos processos mentais superiores da criança depende da presença de agentes mediadores na interação da criança com o meio ambiente. O próprio Vygotsky enfatizou principalmente ferramentas simbólicas — mediadores apropriados por crianças no contexto de atividades socioculturais particulares, o mais importante dos quais ele considerou a educação formal. Estudantes russos de Vygotsky pesquisaram dois tipos adicionais de mediação — mediação através de outro ser humano e mediação em uma forma de atividade de aprendizagem organizada. Assim, o modelo de aquisição tornou-se um modelo de mediação (...).

[16] A história dos testes de inteligência traz em si um paradoxo inerente. Por um lado, um dos aspetos mais importantes dos testes de inteligência é a sua capacidade de prever o desempenho futuro da criança. Por outro lado,

Zona de Denvolvimento Proximal (ZDP) é um conceito central no construtivismo interacionista. Segundo Kozulin (2003), o conceito da teoria de Vygotsky refere que a aprendizagem acontece no intervalo entre o conhecimento real e o conhecimento potencial, ou seja, é a distância que vai daquilo que o indivíduo já tem como seu conhecimento e aquilo que ele pode aprender. Para esta teoria, é aqui que está reservada a atuação da educação, partindo do conhecimento do indivíduo, estimulando o desenvolvimento do potencial, ou seja, utilizando a ZDP do indivíduo para o desenvolver. O desenvolvimento do conhecimento potencial torna-o conhecimento real, abrindo, assim, lugar para novos conhecimentos potenciais. Este processo feito de forma cíclica resulta no desenvolvimento do indivíduo. No construtivismo de Vygotsky, as interações jogam um papel crucial e determinante. Considera-se conhecimento real aquilo que o sujeito é capaz de fazer sozinho, enquanto o conhecimento potencial é aquilo que o sujeito consegue fazer com a ajuda de outros.

1.4 Teoria APOS

A Teoria Action, Process, Object and Schema (APOS), assente no trabalho de Jean Piaget, é uma teoria construtivista da aprendizagem que procura explicar como os conceitos matemáticos podem ser aprendidos. As suas ideias fundamentais foram apresentadas de maneira inédita por Dubinsky nos anos 1980. O seu objeto de estudo são modelos do que pode ocorrer na mente de um indivíduo quando este procura aprender conceitos matemáticos. A partir de tais modelos a teoria estrutura materiais instrutivos e avalia os sucessos e os insucessos dos alunos ao lidar com situações problemáticas da Matemática.

A teoria APOS pode ser utilizada numa perspetiva estritamente desenvolvimentista (Breidenbach et al. 1992) ou como uma ferramenta de avaliação estritamente analítica (Dubinsky et al. 2013) ou em ambas perspetivas (Weller et al. 2011). Nos três casos a todos os níveis de ensino da Matemática. Apesar de ser uma teoria criada no âmbito da Educação Matemática, a sua aplicação tem-se estendido para fora desta área do conhecimento, a título de exemplo temos a sua aplicação em ciências da computação.

O desenvolvimento da teoria, desde a sua criação até à data presente, é decomposto em três fases: (1) primeiros pensamentos; (2) trabalho feito pela Research in

---

o sistema educacional que desde o início tem sido o principal cliente do teste psicométrico tem como objetivo descobrir e dar conta do potencial de aprendizagem das crianças, ou seja, sua capacidade de mudança sob a influência da instrução. A disparidade entre as propriedades psicométricas estáveis do teste de quociente de inteligência (QI) e a natureza dinâmica da capacidade de aprendizagem de uma criança revelou-se em várias controvérsias de QI. Gradualmente, surgiram sistemas alternativos de avaliação dinâmica (Lidz, 1987; Sternberg & Grigorenko, 2002). O que uniu todos esses foi a introdução da fase de aprendizagem na situação de avaliação. Em vez de estudar o desempenho individual da criança, a avaliação dinâmica centra-se na diferença entre o desempenho antes e depois da fase de aprendizagem ou assistência.

Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC); (3) esforços contínuos por pequenas equipas que funcionam de maneira independe. (Arnon et al., 2014)

Os conceitos-chave a reter desta teoria são os seguintes: ação, processo, objeto, esquema, relativos à estrutura mental, interiorização, capsulamento, coordenação, reversão, descapsulamento, relativos a mecanismos pelos quais as estruturas mentais são construídas. Outro conceito chave da teoria APOS é o da decomposição genética, um modelo hipotético de construções mentais que um aluno está sujeito a fazer para aprender conceitos matemáticos.

1.4.1 Percurso histórico da Teoria APOS. Abstração reflexiva

Intimamente ligado à Teoria APOS está o conceito de abstração reflexiva proveniente das ideias de Piaget. Este considerava como sendo tanto o mecanismo principal para a construção mental no desenvolvimento do pensamento como o mecanismo mental através do qual todas as estruturas lógico-matemáticas são desenvolvidas na mente do indivíduo.

Para Piaget, citado por Arnon et al. (2014), abstração reflexiva é o mecanismo mental através do qual todas as estruturas lógico-matemáticas surgem. Para o autor, a abstração reflexiva, por si só, suporta e anima todo o imenso edifício da construção lógico-matemática.

Apegando-se às ideias de Piaget, em 1982, Dubinsky, que tinha como linha de investigação a Análise Funcional, adotou uma nova linha de investigação que consistia na pesquisa das atividades mentais envolvidas na aprendizagem de matemática por parte dos alunos.

> What is reflective abstraction? Piaget's answer, repeated in many diferent publications, consists of two parts. The first part involves reflection, in the sense of awareness and contemplative thought, about what Piaget called content and operations on that content, and in the sense of reflecting content and operations from a lower cognitive level or stage to a higher one (i.e., from processes to objects). The second part consists of reconstruction and reorganization of the content and operations on this higher stage that results in the operations themselves becoming content to which new operations can be applied.[17] (Arnon et al., 2014, p. 6)

Dubinsky constatou que a segunda parte é muito próxima a ideias matemáticas, o que pode ser visto em dois exemplos: As funções são primeiramente construídas como operações que transformam elementos de um conjunto em elementos de um outro conjunto. Num estádio mais elevado, as funções são consideradas como elementos de um espaço funcional, tornando-se conteúdos sobre os quais novas operações são construídas. Os números inteiros constituem um outro exemplo, numa etapa um

[17] O que é abstração reflexiva? A resposta de Piaget, repetida em muitas publicações diferentes, consiste em duas partes. A primeira parte envolve reflexão, no sentido de consciência e de pensamento contemplativo, sobre aquilo a que Piaget denominou conteúdo e operações sobre o conteúdo, bem como no sentido de refletir conteúdo e operações a partir de um estádio ou nível inferior para um mais alto (i.e., de processos para objeto). A segunda parte consiste na reconstrução e reorganização do conteúdo e operações neste estádio mais alto que resulta nas próprias operações tornando-se conteúdo aos quais novas operações podem ser aplicadas.

inteiro é uma operação ou processo de formar unidades — objetos idênticos entre si — em conjuntos através da contagem e ordenação de objetos. Noutra etapa mais avançada, os inteiros tornam-se objetos sobre os quais novas operações são aplicadas. (Arnon, et al., 2014)

A partir da constatação acima, Dubinsky desenvolveu a Teoria APOS.

Nota-se nas ideias de Piaget o percurso da teoria APOS:

> Piaget não acreditava que as ideias mais gerais e abstratas provêm de extrair caraterísticas comuns de vários fenómenos, considerando um exemplo de Matemática avançada, ele escreveu: o conceito ou a propriedade de grupo é obtida, não por este tipo de abstração [extrair caraterísticas comuns], mas através de um modo de pensamento caraterístico da Matemática moderna e da lógica — abstração reflexiva — que não é proveniente de coisas, mas sim das nossas formas de agir sobre as coisas, as operações que realizamos sobre elas. … (Piaget 1968/1970 apud Arnon, 2014, p. 7)

O desenvolvimento do conhecimento sobre um objeto, tanto mental como físico, requer simultaneamente o objeto e o sujeito que age sobre o objeto. Desta maneira, para Piaget, o sujeito — o conhecedor — e o objeto — o conhecido — não podem ser dissociados. Falar de um implica falar do outro. Tais considerações, para o autor, são extensivas a todos os níveis e conteúdos da Matemática, desde o mais elementar ao mais complexo ao nível de descoberta de Matemática nova. A estrutura geral da teoria APOS consiste em sucessivamente operações sobre o conteúdo desembocarem em novo conteúdo, o que permite fazer a distinção entre ações materiais e operações interiorizadas, permitindo a distinção entre estruturas mentais de ação e de processo, a distinção entre interiorização e capsulamento.

> . . . it follows that when the child discovers by experience the result of an action, for example, that the result of an addition is independent of the order followed (which is a property of the actions of combining and ordering and not a property of the objects as such, which include neither sum nor order independently of the actions carried out on them), reflective abstraction consists of translating a succession of material actions into a system of interiorized operations, the laws of which are simultaneously implied in an act. (Beth and Piaget 1966/1974, apud Arnon, 2014, p. 7)[18]

Para Piaget, as propriedades dos objetos não residem neles, mas sim nas ações que recaem sobre eles, ou seja, as propriedades dos objetos dependem dos objetos e dos sujeitos que os conhecem. Para Dubinsky, "ações materiais" referem-se a ações realizadas por um sujeito, sendo externas a ele. No exemplo apresentado por Piaget, as ações materiais são as transformações físicas do objeto partindo de dois pequenos conjuntos de objetos, ou seja, contar o número de elementos num conjunto, a seguir no outro, e adicionar os dois resultados para obter o número total de objetos. Logo a

---

[18] Segue-se que, quando uma criança descobre por exepriência o resultado de uma ação, por exemplo, que o resultado de uma adição é independente da ordem seguida (o que é uma propriedade das ações de combinar e de ordenar e não uma propriedade do objeto como tal, o que não inclui nem a soma nem a ordem independentemente das ações desenvolvidas nela), abstração reflexiva consiste na tradução de uma sucessão de ações materiais para um sistema de operações interiorizadas, cujas leis implicam simultaneamente em ação.

seguir fazer o mesmo na ordem inversa e constatar que dá no mesmo. Neste caso, os números são objetos, isto é, números naturais representados por conjuntos de objetos físicos, a ação aplicada a estes objetos é a adição e a propriedade da operação é a comutatividade. À luz da teoria APOS, as "operações interiorizadas" de Piaget tornaram-se processos. A "tradução" tornou-se o mecanismo mental da teoria APOS de "interiorização", onde uma ação externa, física ou material é reconstruída na mente do sujeito para se tornar num processo — operação interiorizada —, isto é, uma construção mental e interna que faz a mesma coisa que a ação, mas que se encontra totalmente na mente do sujeito e não no seu exterior. Para Dubinsky, o "sistema" de Piaget refere-se a um "esquema", o conceito de comutatividade, e nele nota-se a ideia de "coerência" mediante a qual um sujeito decide se um esquema particular é ou não aplicável a uma situação problemática da Matemática.

O conceito de abstração reflexiva de Piaget não esteve apenas na base do surgimento da teoria APOS, contribuiu também para o seu desenvolvimento, nomeadamente, como um processo, entenda-se ação ou operação interiorizada, é transformado num objeto, operação sobre a qual operações de um estádio mais avançado podem ser aplicadas, através do mecanismo mental de capsulamento.

1.4.2 Mecanismos e estruturas mentais

Para avançarmos e melhor entendermos a teoria APOS é importante abordar os conceitos que estão na base da sua compreensão. São eles os mecanismos mentais ou abstrações reflexivas, as estruturas mentais e a decomposição genética. Os elementos interiorização, capsulamento, coordenação, reversão, descapsulamento, tematização e generalização constituem os mecanismos mentais. Estes caraterizam-se por serem abstrações reflexivas empreendidas pelo indivíduo através das quais o seu raciocínio evolui de uma estrutura mental para outra. Os elementos ação, processo, objeto e esquema são estruturas mentais da teoria APOS. Estes têm em comum o facto de serem etapas pelas quais passa o raciocínio do indivíduo ao longo do processo de construção de conhecimento matemático. (Dubinsky, 1991)

1.4.2.1 Ações

Os conceitos surgem primeiro como ações externas ao indivíduo que recaem sobre determinados objetos, transformando-os à luz de regras próprias. Aqui, cada passo da transformação é dado explicitamente com base em instruções ou palpites externos à mente do indivíduo (Arnon, et al., 2014). Há um cumprimento escrupuloso da sequência de instruções consideradas para a transformação do objeto. Na operação $a \times b = c$, onde a é o multiplicando — a quantidade que vai ser repetida — e b é o multiplicador — número que indica quantas vezes a quantidade vai ser repetida —, o indivíduo que adiciona tantas parcelas do multiplicando quanto se indica no multiplicador mostra que ainda trabalha ao nível da ação, pois há um cumprimento escrupuloso e explícito das instruções da operação para obtenção do produto *c.* O nível em que o indivíduo trabalha revela a sua compreensão, ele compreende ao nível da ação.

Para calcular o valor de potências de base e expoente natural, o indivíduo que está apenas ao nível de compreensão de ação, não conseguirá calcular sem antes explicitar, isto é, as suas ações de transformação do objeto potência serão feitas sobre $a \times a \times a \times ... \times a$ n vezes e não sobre a^n.

A ação é uma estrutura mental bastante importante, porquanto serve de base para o surgimento das outras. Sua importância reside no facto de preparar as condições para a interiorização de processos, aquela estrutura mental em que o indivíduo efetua operações mentalmente, suprimindo fases da ação ou passando por elas de forma implícita. Para uma melhor compreensão da estrutura mental ação, a seguir apresentamos alguns exemplos:

- No trabalho com polinómios: o produto de dois binómios começa por se efetuar a distributividade de cada um dos monómios do primeiro binómio pelos dois monómios do segundo binómio. Não se chega ainda à análise de produtos notáveis. Para o caso de potências de base binomial e expoente natural, considerando os métodos do triângulo de pascal e do binómio de Newton, há um cumprimento explícito dos passos do método.
- No trabalho com funções: referimo-nos aqui a funções de uma só variável. O indivíduo consegue trabalhar com elas na forma explícita, pois, a partir da sua definição é o objeto que se torna notável, o objeto explícito. O indivíduo é capaz de substituir valores do domínio e obter a sua imagem seguindo as operações matemáticas que se indicam na expressão da função. O indivíduo apresenta dificuldades em reconhecer as partes que compõem a função e, claro, em transformá-la, quando ela é apresentada fora da forma como é definida, fora da forma explícita, ou seja, na forma implícita ou na forma paramétrica. Na forma explícita, mas com o domínio em dois ou mais intervalos, o indivíduo também tem dificuldades em transformar a função.
- No cálculo diferencial: na fase de ação o indivíduo faz um seguimento escrupuloso de uma sequência de resolução através de regras e fórmulas de derivação. Se apresentada de maneira diferente, pode causar confusão.
- No sistema de coordenadas cartesianas: na fase de ação o indivíduo faz uma graduação rigorosa dos eixos, procura colocar no sistema todos os seus elementos. Na falta de elementos do sistema de coordenadas cartesianas, o indivíduo tem dificuldade de fazer nele representações, tem dificuldade de reconhecê-lo.

1.4.2.2 Interiorização e processos

Os mecanismos mentais de interiorização e coordenação dão lugar ao objeto mental processo. No caso da interiorização, o fenómeno consiste na transição de ação para processo, ou seja, o indivíduo deixa de fazer operações, física ou mentalmente, obedecendo a todos os passos. O indivíduo ganha e põe em prática a capacidade de saltar alguns passos, o indivíduo passa a ter instruções e palpites interiorizados, deixando de depender dos seus correspondentes externos (Arnon, et al., 2014). A questão não tem a ver puramente com a esfera em que a operação é feita, mas muito mais com a sequência de passos com que ela é feita, escrupulosa ou não.

No caso da operação $a \times b = c$, o que acontece é que o indivíduo já tem em si uma série de alternativas, isto é, processos, para contornar a sequência escrupulosa dos passos. Por exemplo, (1) ao multiplicar 5×10, já não adiciona 10 vezes o número 5, mas sim junta ao número 5 o algarismo zero, o que resulta em 50; (2) ao multiplicar 133×11 decompõe a operação em $133 \times 10 + 133$, o que nos leva a $1330 + 133 = 1463$. Claro está aqui que o indivíduo já não está preso a uma sequência de passos para efetuar a multiplicação, as suas capacidades estão bem além disso, ele é capaz de combinar várias ações num mesmo processo, nota-se evolução. Nota-se também que a transformação ou, se preferirmos, a metamorfose do objeto não é explícita, mas sim implícita, o que facilmente nos leva a concluir que muito do que se fez para que tal transformação ocorresse está interiorizado pelo indivíduo.

Para aprofundamento e melhor entendimento, a seguir apresentamos alguns exemplos da estrutura mental processo:

- No trabalho com polinómios: depois de alguma experiência acumulada, o indivíduo ganha a capacidade de identificar produtos notáveis, por exemplo, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Ganha a capacidade de manipular objetos mais complexos, por exemplo, $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2$. Entende o desenvolvimento do binómio $(a+b)^n$ mesmo quando n não está explícito.
- No trabalho com funções: o indivíduo é capaz de reconhecer o domínio e, em função disso, saber, ou ter uma clara noção de que valores utilizar para substituir a variável independente. O indivíduo é capaz de explicitar e identificar os elementos que fazem parte da função.
- No cálculo diferencial: olhando para a(s) função(ões) como objeto(s), o indivíduo é capaz de reconhecer a aplicabilidade e aplicar regras e fórmulas de derivação, independentemente da forma como se apresenta(m) a(s) função(ões).
- No sistema de coordenadas cartesianas: o indivíduo é capaz de construir o sistema de coordenadas cartesianas bidimensional marcando nele apenas os pontos que quer representar. É capaz de construir o sistema de coordenadas cartesianas tridimensional e compreendê-lo apesar da aparente falta de perpendicularidade entre os seus eixos.

1.4.2.3 Capsulamento e objetos

Consiste na mudança da forma como se considera um processo. Consiste em passar a olhar para ele como um objeto sobre o qual podem ser aplicadas ações, ou seja, consiste em considerar uma estrutura dinâmica como estática sobre a qual ações podem ser aplicadas (Arnon, et al., 2014).

Quanto à operação $a \times b = c$, o indivíduo é capaz de, diante de uma combinação de várias operações de multiplicação, reorganizar as suboperações de modo a obter o resultado final de maneira mais fácil e célere.

A seguir apresentamos alguns exemplos:

- No trabalho com polinómios: numa expressão, o indivíduo é capaz de reconhecer o polinómio como se de um símbolo único se tratasse e, a partir daí, aplicar sobre ele diversas ações e, claro, as propriedades associadas a tais ações.
- No trabalho com funções: nesta altura o indivíduo é capaz de fazer a composição de funções, é capaz de rapidamente ter uma ideia do esboço do seu gráfico, é capaz de aplicar regras de derivação e regras de integração a uma função como se estivesse a aplicá-las à função identidade.

- No cálculo diferencial: o indivíduo é capaz de reconhecer funções em que foi aplicada regras ou fórmulas de derivação, assim como é capaz de identificar que regras e fórmulas e como foram aplicadas.
- No sistema de coordenadas cartesianas: o indivíduo reconhece no sistema de coordenadas cartesianas tridimensional três subsistemas de coordenadas cartesianas bidimensionais. Considerando um sistema de coordenadas cartesianas tridimensional com o ponto genérico (x, y, z), o indivíduo é capaz de reconhecer os subsistemas de coordenadas cartesianas bidimensionais de pontos genéricos (x, y), (y, z) e (x, z). Desta forma, considera-os como objetos do sistema de coordenadas a três dimensões.

1.4.2.4 Descapsulamento, coordenação e reversão de processos

O descapsulamento de um objeto mental consiste no retorno ao processo que esteve na base do seu surgimento (Arnon, et al., 2014). A prática mostra-nos que, obvia e geralmente — salvo se se conhecer uma descrição prévia do surgimento do objeto —, não há o processo, há processos que podem ter estado na base do encapsulamento que deu lugar ao objeto. A capacidade de retornar objetos a vários processos distintos, ou seja, de reconsiderar estruturas estáticas como várias estruturas dinâmicas distintas, abre caminho à coordenação que é sinónimo de combinação de partes de processos distintos em novos objetos. O mecanismo mental coordenação é um indicador claro de grande capacidade de reconstrução e criação de objetos matemáticos. Segundo Arnon et al. (2014), "The mechanism of *coordination* is indispensable in the construction of some Objects. Two Objects can be de-encapsulated, their Processes coordinated, and the coordinated Process encapsulated to form a new Object."[19]

No que diz respeito à operação $a \times b = c$, nesta altura c já está capsulado. Para calcular o máximo divisor comum (mdc) ou o mínimo múltiplo comum (mmc) de dois números já capsulados como c, o indivíduo descapsula ambos, identifica as potências de base prima e, em seguida, volta a capsulá-los num só número, no mdc ou no mmc.

A seguir apresentamos alguns exemplos:

- No trabalho com polinómios: no trabalho com expressões algébricas, a capacidade de comparar monómios, binómios, trinómios ou polinómios de maneira conveniente para poder efetuar simplificações e outras operações pertinentes.
- No trabalho com funções: a capacidade de desfazer a composição de funções e fazer novas composições ou outras operações é um exemplo de coordenação. A inversão de uma função, isto é, a transformação do domínio em contradomínio e vice-versa consittui um exemplo de reversão. (Arnon, et al., 2014)

---

[19] O mecanismo de coordenação é indispensável na construção de alguns objetos. Dois objetos podem ser desencapsulados, seus processos coordenados e o processo coordenado encapsulado para formar um novo objeto.

- No cálculo diferencial: a capacidade de encontrar a função primitiva a partir da função derivada.
- No sistema de coordenadas cartesianas: a capacidade de passar de coordenadas cartesianas para diferentes tipos de coordenadas, cilíndricas, esféricas ou curvilíneas, e vice-versa.

1.4.2.5 Tematização e esquemas

Para Dubinsky (1991), o esquema consiste no seu dinamismo e reconstrução contínua como consequência da atividade matemática do indivíduo. A coerência do esquema reside na capacidade de o indivíduo escolhê-lo adequadamente em função da situação matemática em que deve aplicá-lo. Quando o esquema atinge um nível ótimo de coerência é transformado em objeto, antes disso é uma estrutura em evolução.

1.4.3 Decomposição genética

Como podemos perceber na citação seguinte, a decomposição genética de um conceito não é única. Isto é fruto das diversas combinações de mecanismos e estruturas mentais em vários esquemas diferentes de como o aluno constrói o seu conhecimento. Até ser experimentada, a decomposição genética é considerada a nível de hipótese e não como algo consumado.

> A genetic decomposition is a hypothetical model that describes the mental structures and mechanisms that a student might need to construct in order to learn a specific mathematical concept. It typically starts as a hypothesis based on the researchers' experiences in the learning and teaching of the concept, their knowledge of APOS Theory, their mathematical knowledge, previously published research on the concept, and the historical development of the concept. Until it is tested experimentally, a genetic decomposition is a hypothesis and is referred to as preliminary.
>
> A new mathematical concept frequently arises as a transformation of an existing concept. As such a genetic decomposition consists of a description of the Actions that a student needs to perform on existing mental Objects and continues to include explanations of how these Actions are interiorized into Processes. At this point, the concept is still seen as something one does. In order to be conceived as an entity in its own right, something that can be transformed, the Process is encapsulated into a mental Object. It is entirely possible that a concept may consist of several different Actions, Processes, and Objects. A genetic decomposition may include a description of how these structures are related and organized into a larger mental structure called a Schema. Included in the description of a Schema may be an explanation of how the Schema is thematized into an Object. The genetic decomposition also explains whatever is known about students' expected performances that indicate differences in the development of students' constructions.[20] (Arnon, et al., 2014, p. 27)

---

[20] Uma decomposição genética é um modelo hipotético que descreve as estruturas e mecanismos mentais que um aluno pode precisar de construir para aprender um conceito matemático específico. Tipicamente começa como uma hipótese baseada nas experiências dos pesquisadores no aprendizado e ensino do conceito, no seu conhecimento da Teoria APOS, no seu conhecimento matemático, na pesquisa previamente publicada sobre o

Para Arnon et al. (2014), a decomposição genética pode ser fruto da observação de dados de alunos, do desenvolvimento histórico do conceito considerado, de material didático e de inquérito, como se descreve a seguir:

- A observação de dados de alunos em fase de aprendizagem de determinado conceito é uma das bases para a elaboração da decomposição genética. A análise à observação possibilita fazer uma descrição do conceito, podendo este ser verificado empiricamente, permite também obter algum conhecimento da atual estrutura mental do aluno.
- O desenvolvimento histórico de um conceito também pode servir de base para a elaboração da decomposição genética. O referido percurso histórico pode ser associado a construções mentais que o indivíduo pode ter feito.
- O material didático — livros, manuais, cadernos, entre outros — utilizado também pode estar na base da elaboração da decomposição genética. A partir de tal material, a análise do investigador pode levá-lo ao entendimento de como os alunos podem chegar ao entendimento do conceito. Desta maneira, o investigador pode fazer uma descrição das estruturas mentais requeridas ao aluno para que possa entender os conceitos em estudo.
- Inquérito por entrevista ou por questionário. Depois de recolhidos os dados, quer de uma forma quer de outra, estes são comparados, o que resulta na identificação de diferenças no entendimento dos alunos de conceitos e no seu desempenho ao lidar com os mesmos. A partir daí põe-se em evidência lacunas nas construções mentais feitas pelos alunos e, consequentemente, identifica-se ações para colmatá-las. Dificuldades na resolução de exercícios ou problemas são indicadores sólidos de que os alunos não fizeram construções mentais ou de que não as fizeram bem.

Um modelo teórico que permite aos investigadores produzir hipóteses que sirvam de base para a produção e aplicação de instrumentos de recolha de dados aos alunos é importante em qualquer investigação. A decomposição genética proporciona a

---

conceito e no desenvolvimento histórico do conceito. Até que seja testada experimentalmente, uma decomposição genética é uma hipótese e é referida como preliminar.

Um novo conceito matemático surge frequentemente como uma transformação de um conceito existente. Como tal, uma decomposição genética consiste numa descrição das Ações que um aluno precisa de realizar em objetos mentais existentes e continua a incluir explicações sobre como essas ações são interiorizadas em Processos. Neste ponto, o conceito ainda é visto como algo que se faz. Para ser concebido como uma entidade por direito próprio, algo que pode ser transformado, o Processo é capsulado num Objeto mental. É perfeitamente possível que um conceito consista em várias Ações, Processos e Objetos diferentes. Uma decomposição genética pode incluir uma descrição de como essas estruturas estão relacionadas e organizadas numa estrutura mental maior chamada Esquema. Incluído na descrição de um Esquema pode ser uma explicação de como o Esquema é atribuído a um Objeto. A decomposição genética também explica o que se sabe sobre os desempenhos esperados dos alunos que indicam diferenças no desenvolvimento das construções dos alunos.

referida base à investigação na teoria APOS, tornando os resultados obtidos por diferentes investigadores comparáveis e mais fiáveis. Por esta razão joga um papel bastante importante na teoria, como se pode notar na citação seguinte:

> When using a genetic decomposition, different researchers can analyze the same data and obtain comparable results. Working as a team they can interpret their results in terms of the model. Without a model they might have a difficulty agreeing on or negotiating their interpretations. Thus, the analysis of data becomes more reliable when it is based on a theoretical model such as a genetic decomposition.[21] (Arnon, et al., 2014, p. 38)

Para Arnon et al. (2014), as construções mentais dos alunos podem ser obtidas a partir da comparação entre a decomposição genética preliminar e o trabalho e respostas dos alunos a inquéritos, quer sejam por entrevista quer sejam por questionário. A decomposição genética joga o papel de um par de lentes que permitem ao investigador explicar como ocorre o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, o seu entendimento e a sua compreensão de conceitos matemáticos. Pela decomposição genética pode-se explicar as diferenças no desempenho dos alunos. Consideremos um caso em que, dada uma mesma tarefa a três alunos, um resolve-a corretamente, o segundo resolve-a, mas com dificuldades e o terceiro resolve-a incorretamente. No caso do primeiro aluno, ele revela ter feito com sucesso uma ou mais construções mentais necessárias para a resolução da tarefa. No caso do segundo aluno, ele revela que não tem a construção integralmente feita por não ter completado a construção ou por a ter esquecido. No caso do terceiro aluno, nota-se que mentalmente tem noção da construção, mas na prática não a tem feita. No caso de as diferenças entre os desempenhos dos alunos não poder ser explicada pela decomposição genética, torna-se necessário revaliá-la e reelaborá-la de modo que seja uma ferramenta capaz de auxiliar o investigador no entendimento das diferenças nas construções mentais dos alunos.

Para além dos três casos acima considerados pelos autores, nós consideraríamos um quarto caso: o caso do aluno que não consegue resolver a tarefa em absoluto, ou seja, não consegue sequer tentar resolvê-la. Neste caso, nota-se que não tem a construção mental feita nem sequer noção da mesma.

Nota-se que a decomposição genética não serve simplesmente para orientar a análise do desempenho e das construções mentais dos alunos, ela serve também para autoavaliação do investigador, permitindo identificar lacunas no seu entendimento sobre como determinado conceito se constrói mentalmente nos alunos, o que se pode refletir em melhores instrumentos de investigação. De qualquer das formas, o principal

---

[21] Ao usar uma decomposição genética, diferentes investigadores podem analisar os mesmos dados e obter resultados comparáveis. Trabalhando como uma equipe, eles podem interpretar seus resultados em termos do modelo. Sem um modelo, eles podem ter uma dificuldade em concordar ou negociar suas interpretações. Assim, a análise de dados torna-se mais confiável quando se baseia num modelo teórico, como uma decomposição genética.

papel da decomposição genética é o de servir de ferramente que possibilita ao investigador entender como os alunos lidam com a aprendizagem de um conceito e o de explicar as razões por detrás das dificuldades dos alunos.

1.5 Teoria da Reificação

1.5.1 Fundamentos da teoria

Anna Sfard (1991), autora da teoria, alega poder-se encontrar na origem da maioria dos conceitos matemáticos duas formas de pensamento fundamentalmente diferentes: uma conceção operacional, onde as noções matemáticas são tidas como produto de certos processos ou identificáveis com os mesmos processos, e a conceção estrutural, para a qual as noções matemáticas são vistas como entidades de objetos reais, como estruturas permanentes, estáticas manipuláveis e combináveis em estruturas mais complexas.

Com base nesta sustentação, para o modelo de desenvolvimento concetual de Sfard a conceção operacional surge primeiro, dando em seguida lugar, através da reificação de processos, a um desenvolvimento que desemboca no surgimento de objetos matemáticos. Para tal, para a travessia do estado de conceção operacional para o estado de objetos matemáticos, a autora propõe a passagem por três fases: (1) interiorização — onde os processos são aplicados a objetos matemáticos já conhecidos e familiares para o indivíduo que os manipula; (2) condensação — onde os processos anteriores evoluem, na mente do indivíduo, até ao estado de unidades compactas; (3) reificação — onde o indivíduo adquire a capacidade de reconhecer as unidades compactas como objetos permanentes por direito próprio, como objetos familiares. (Sfard, 1991)

Para Sfard (1991), a Matemática, no que toca à inacessibilidade, parece estar acima das outras disciplinas científicas, pelo que a autora reconhece haver algo de especial no pensamento que envolve a construção do conhecimento matemático. Desta forma, e para analisar esta caraterística própria da aprendizagem da Matemática, a autora procurou conceber uma teoria que envolvesse de forma simultânea a Filosofia e a Psicologia da Matemática, considerando da mesma maneira o pensamento matemático como processo de construção de conhecimento e como produto de tal construção. Procurou ainda construir a sua compreensão a partir de discursos filosóficos, que se debruçam sobre a natureza do pensamento matemático, de matemáticos. Procurou também compreender a essência psicológica do surgimento de tal pensamento.

1.5.2 Processos e objetos

A dualidade concetual — processo e objeto, o que também pode ser visto como operacional e estrutural — de abordagem desta teoria não revela antagonismo, mas sim complementaridade, são os dois lados de uma mesma moeda, portanto, duas entidades inseparáveis. As duas formas de encarar conceitos matemáticos são imprescindíveis para a construção de conhecimento matemático. É preciso passar pelo, normalmente longo, caminho da operacionalização ou dos processos para se chegar e passar a percorrer o caminho das estruturas e dos objetos.

Para Sfard (1991), a abordagem de um conceito matemático da perspetiva operacional ou da perspetiva estrutural depende, para além do nível de conhecimentos e habilidades em Matemática que o indivíduo tenha, do foco da sua atenção no momento que lida com um determinado conceito. Deste modo, quando o indivíduo for capaz de reconhecer rapidamente um conceito, de o tratar como algo real e de o manipular como todo não se atendo aos processos que o originam, o conceito poderá ser considerado um objeto. O mesmo conceito será considerado potencial e não atual, quando for interpretado pelos processos que o originam. Para a autora, a conceção estrutural carateriza-se por ser estática, instantânea e integrativa, ao passo que a operacional carateriza-se por ser dinâmica, sequencial e detalhada.

A seguir (

Tabela 5) apresentamos em síntese a comparação entre as duas conceções.

Tabela 5: Conceções operacional e estrutural (Sfard, 1991, p. 33)

	Conceção operacional	Conceção estrutural
Caraterísticas gerais	A entidade matemática é concebida como um produto de certo processo ou é identificada com o próprio processo	A entidade matemática é concebida como uma estrutura estática, como se fosse um objeto real
Representações internas	É apoiada por representações verbais	É apoiada por imagética visual
O seu lugar no desenvolvimento de conceitos	Desenvolve-se na primeira fase da formação do conceito	Desenvolve-se a partir da conceção operacional
O seu papel nos processos cognitivos	É necessária, mas não suficiente para uma eficaz	Facilita todos os processos cognitivos

	aprendizagem e resolução de problemas	(aprendizagem, resolução de problemas)

Na tabela seguinte apresentamos uma comparação entre conceções operacional e estrutural de três conceitos matemáticos estudados nesta tese: o de função, o de derivação e o de integração. Utilizando três conceitos em estudo, damos corpo ao que sinteticamente Anna Sfard descreve na tabela 2.5. A tabela 2.6 constitui uma ferramenta auxiliar na caraterização das conceções dos alunos sobre conceitos de Cálculo. Dito de outra forma, a tabela a anterior é a referência e a tabela seguinte é a que, com base na referência, permitiu distinguir as perspetivas operacional e estrutural de três conceitos em estudo. A mesma foi feita tendo em conta o trabalho de Sfard (1991) sobre descrição estrutural e operacional de noções matemáticas.

Tabela 6: Exemplo de conceções operacional e estrutural

	Conceção operacional	Conceção estrutural
Função	Sequência de passos que nos permitem a substituição de números reais, cálculo e obtenção de outros números reais	Lei que associa um conjunto numérico a outro
Derivação	Limite do quociente incremental de uma função; função obtida aplicando regras e fórmulas da tabela de derivação	Declive de uma função; lei da velocidade de um deslocamento; custo marginal, ou seja, taxa de variação da função custo total em determinado ponto
Integração	Soma das áreas entre a curva da função integranda e o eixo das abscissas; função obtida aplicando regras e fórmulas da tabela de integração	Conjunto de funções com um mesmo declive; conjunto de leis de deslocamento com a mesma lei de velocidade; conjunto de funções custo total com o mesmo custo marginal

1.6 Teorias APOS e Teoria da Reificação

Trata-se de duas teorias construtivistas que, na sua essência, trazem uma abordagem semelhante. Ambas enriquecem a mesma teoria da aprendizagem de que são oriundas, a Teoria Construtivista Cognitivista, dando profundidade ao contributo de Piaget, enquadrando os seus conceitos na aprendizagem da Matemática, construindo e apresentando novos conceitos que contribuem para um melhor entendimento do fenómeno da aprendizagem da Matemática. Ambas se socorrem de linguagens de programação para reforçar a diferença que tanto procuram clarificar entre operação — ação e/ou processo — e objeto, entre raciocínio ao nível deste e daquele. Ambas, como não podia deixar de ser, na sua condição de teorias cognitivistas, abordam a estrutura mental do indivíduo, explicam a sua evolução na construção do conhecimento matemático, estabelecem uma hierarquia que tem como nível mais baixo a operacionalização de conceitos e o mais alto os conceitos como objetos. Ambas reconhecem que essa hierarquização é cíclica à medida que o tempo passa e se vai estudando novos conceitos que congregam outros anteriores, normalmente de menor complexidade. Em determinados momentos uma vai mais a fundo que a outra, uma apresenta mais detalhes que a outra, mas ainda assim são semelhantes na sua abordagem sobre a aprendizagem da Matemática.

Tabela 7: Comparação entre as teorias APOS e da Reificação

	Teoria APOS	Teoria da Reificação
Estruturas mentais consideradas	Ação, processo, objeto e esquema	Processo, unidade compacta e objeto
Mecanismos mentais considerados	Interiorização, capsulamento, coordenação, reversão descapsulamento, tematização e generalização	Interiorização, condensação e reificação
Conceitos considerados a nível da operacionalização	Ação, processo e interiorização	Interiorização, processo, condensação e unidade compacta
Conceitos considerados a nível de objetos	Objeto, esquema, capsulamento, coordenação, reversão descapsulamento, tematização e generalização	Reificação e objeto

1.7 Antecedentes do tema

A seguir apresentamos alguns estudos que se afiguram importantes antecedentes à nossa investigação. Autores como David Tall, Ed Dubinsky, Anna Sfard, António Domingos, Marilyn Carlson, María Trigueros, entre outros, fazem caraterizações da aprendizagem dos alunos e apresentam-nos bases significativas que orientam a caraterização da aprendizagem dos alunos. Salta à vista a constância de trabalhos de Ed Dubinsky nas referências bibliográficas dos trabalhos dos autores mencionados inclusive dele próprio. Não se trata de uma mera inclusão nas referências bibliográficas, o trabalho de Ed Dubinsky esteve na sustentação dos demais. Este é um forte indicador da importância que a Teoria APOS tem tido ao longo dos anos na aprendizagem do Cálculo.

Pôde-se constatar que, nesta etapa do desenvolvimento da Educação Matemática, os estudos são predominantemente qualitativos, o que facilmente se entende nas seguintes palavras:

> In our view, two factors limit the usefulness of experimental studies in the early stages of mathematics education research. First, it is difficult to control a classroom environment sufficiently so as to isolate variables and determine cause and effect. Second, classical experimental design is used to test and verify theories. But

> mathematics education research is a young field, and for many research questions there is no established theory to test.[22] (Carlson & Rasmussen, 2008, pp. Vii e viii)

Para Carlson & Rasmussen (2008), na etapa atual do desenvolvimento da Educação Matemática, um objetivo central é o de desenvolver modelos explicativos de padrões nas observações. Nas subsecções seguintes, procurámos apresentar alguns modelos explicativos relevantes para a nossa investigação, intercalando-os com apreciações nossas.

1.7.1 Dificuldades dos alunos no Cálculo

Num artigo apresentado ao Congresso Internacional sobre Educação Matemática (International Congress on Mathematical Education — ICME), David Tall (1992) começa por afirmar que há diferença na abrangência e na profundidade com que se aborda o Cálculo em diversas realidades:

> It should be emphasised that the Calculus means a variety of different things in diferent countries in a spectrum from:
>
> 1. informal calculus – informal ideas of rate of change and the rules of differentiation with integration as the inverse process, with calculating areas, volumes etc. as applications of integration
>
> to
>
> 2. formal analysis — formal ideas of completeness, $\varepsilon - \delta$ definitions of limits, continuity, differentiation, Riemann integration, and formal deductions of theorems such as mean-value theorem, the fundamental theorem of calculus etc.,
>
> with a variety of more recent approaches including
>
> 3. infinitesimal ideas based on non-standard analysis,
>
> 4. computer approaches using one or more of the graphical, numerical, symbolic manipulation facilities with, or without, programming.[23] (Tall, 1992, p. 1)

Esta afirmação remete-nos à necessidade de fazer considerações curriculares na análise à aprendizagem dos alunos, sob pena de criar expetativas desajustadas. Atendento à variação na abrangência e na profundidade com que se aborda o Cálculo,

---

[22] Em nossa opinião, dois fatores limitam a utilidade de estudos experimentais nos estágios iniciais da pesquisa em educação matemática. Primeiro, é difícil controlar suficientemente um ambiente de sala de aula de modo a isolar variáveis e determinar causa e efeito. Em segundo lugar, o design experimental clássico é usado para testar e verificar teorias. Mas a pesquisa em educação matemática é um campo jovem e, para muitas questões de pesquisa, não há uma teoria estabelecida para testar.

[23] Deve-se enfatizar que o Cálculo significa uma variedade de coisas diferentes em diferentes países num espectro de: cálculo informal — ideias informais de taxa de mudança e as regras de diferenciação com integração como o processo inverso, com o cálculo de áreas, volumes etc. como aplicações de integração para análise formal — ideias formais de completude, $\varepsilon - \delta$ definições de limites, continuidade, diferenciação, integração de Riemann e deduções formais de teoremas como o teorema do valor médio, o teorema fundamental do cálculo etc., com uma variedade de abordagens mais recentes, incluindo ideias infinitesimais baseadas em análises não padronizadas, Abordagens computacionais utilizando uma ou mais das instalações de manipulação gráfica, numérica e simbólica, com ou sem programação.

torna-se importante situar o leitor, fazendo descrições sobre carga horária e conteúdos lecionados. Portanto, é necessário fazer-se alguma referência àquilo que Sacristán (1998) chamou de dimensões do currículo — currículo prescrito, currículo apresentado aos professores, currículo modelado pelo professor, currículo em ação, currículo realizado e currículo avaliado.

Dando ênfase ao conceito de limite de uma função, Tall (1992) apresenta uma lista de dificuldades dos alunos na aprendizagem do Cálculo:

- restricted mental images of functions,
- the Leibniz notation — a ‘useful fiction’ or a genuine meaning,
- difficulties in translating real-world problems into calculus formulation,
- difficulties in selecting and using appropriate representations,
- algebraic manipulation — or lack of it,
- difficulties in absorbing complex new ideas in a limited time,
- difficulties in handling quantifiers in multiply-quantified definitions,
- consequent student preference for procedural methods rather than conceptual understanding.[24] (Tall, 1992, p. 5)

O mesmo autor apresenta-nos duas formas utilizadas por alunos (e também por professores) de lidar com dificuldades do cálculo de limites e com processos infinitos. O autor faz menção à maior inclinação dos alunos para a segunda forma, consistindo em separar teorias problemáticas de métodos práticos para resolver problemas:

- reconcile the old and the new by re-constructing a new coherent knowledge structure,
- keep the conflicting elements in separate compartments and never let them be brought simultaneously to the conscious mind.[25] (Tall, 1992, p. 3)

A caraterização que se faz de dificuldades dos alunos na aprendizagem do conceito de função, em particular, e de conceitos do Cálculo, em geral, abre portas à necessidade de se aprofundar a caraterização da imagem mental e da aprendizagem de tais conceitos. Esta caraterização pode ser feita em quatro dimensões — algébrica, geométrica, numérica e descritiva — e consolidada com o cruzamento das informações provenientes das mesmas.

[24] • imagens mentais restritas de funções, • a notação de Leibniz - uma "ficção útil" ou um significado genuíno, • dificuldades em traduzir problemas do mundo real em formulação de cálculo, • dificuldades em selecionar e usar representações apropriadas, • manipulação algébrica — ou falta dela, • dificuldades em absorver novas ideias complexas num tempo limitado, • dificuldades em lidar com quantificadores em definições multiplamente quantificadas, • consequente preferência do aluno por métodos procedimentais, em vez de compreensão concetual.

[25] • conciliar o antigo e o novo reconstruindo uma nova estrutura de conhecimento coerente, manter os elementos conflitantes em compartimentos separados e nunca permitir que eles sejam trazidos simultaneamente para a mente consciente.

1.7.2 Compreensão de conceitos matemáticos avançados — A Matemática no início do superior

Como trabalho que aborda a aprendizagem do Cálculo também encontrámos o trabalho de António Domingos (2003). Com o objetivo geral de caraterizar a compreensão dos conceitos de sucessão, de função e de cálculo diferencial, com os objetivos específicos de integrar o contributo de várias teorias sobre a construção dos conceitos matemáticos, caraterizar a complexidade dos conceitos imagem que os alunos têm dos conceitos matemáticos ensinados e caraterizar desempenhos escolares típicos de alguns alunos, o autor realizou um estudo com alunos do 1.º ano de licenciaturas em Ensino das Ciências, Engenharia Electrotécnica e Matemática. Os conceitos considerados são os da disciplina de Análise Matemática I.

Com uma metodologia qualitativa e apoiando-se em trabalhos de Dubinsky, Sfard, Tall e Vinner, respetivamente, na teoria APOS, na teoria da Reificação, nas ideias do pensamento matemático avançado, o autor caraterizou níveis de conceitos imagem que possuem propriedades próprias — localidade, hierarquia, estabilidade e oscilação — que se distinguem entre conceitos imagem incipientes, instrumentais e relacionais, com os primeiros mais ligados à Matemática Elementar, enquanto que os últimos estão mais ligados à Matemática Avançada. Caraterizou também os desempenhos escolares de três dos 15 alunos inicialmente considerados no estudo que revelaram sucesso escolar, apesar de apresentarem conceitos imagem bastante diversificados, nomeadamente um apresentando uma compreensão relacional dos conceitos — manifestando-se capaz de os aplicar em diversas situações —, o segundo apresentou uma compreensão instrumental dos conceitos — apresentando um desempenho satisfatório, contudo operacional —, e o último manifestou-se paradoxal, uma vez que mesmo aparesentando uma compreensão incipiente da maioria dos conceitos, apresentou bom desempenho escolar.

Contributo integrado de várias teorias sobre a construção de conceitos matemáticos

Domingos (2003) conclui que a combinação dos pontos fortes de várias teorias — teoria da Reificação, teoria APOS, assim como a conceção proceptual — proporcionou uma ferramenta poderosa no sentido de melhor caraterizar os níveis de conceito imagem propostos, proporcionando uma linguagem própria, bem como permitindo acompanhar o seu desenvolvimento de estudo dos conceitos matemáticos desde os mais elementares aos mais avançados.

Da teoria da Reificação (Sfard, 1991) obtém-se uma explicação completa sobre como se pode conceber objetos matemáticos passando por uma concepção operacional e chegando a uma estrutural. Este caminho é feito passando pelas fases de interiorização, condensação e reificação, o que torna os objetos cada vez mais compactos até o ponto de se tornarem novos objetos matemáticos. Por sua vez, Tall (2002) admite que a formação de novos conceitos ocorre numa sequência que inicia na realização de procedimentos, evolui passando por processos e, por último, chega a proceitos. À medida que a evolução acontece, o domínio do conceito é cada vez mais sofisticado, resultando finalmente na capacidade de pensar simbolicamente sobre o mesmo. Dubinsky (1991) apresenta um modelo que se assemelha aos dois anteriores. Para ele o domínio do conceito tem quatro níveis de estrutura mental: ação, processo, objeto e esquema. A passagem por cada um desses níveis envolve mecanismos mentais: Interiorização, capsulamento, coordenação, reversão. Deste modo Domingos (2003, p. 345) conclui:

> Embora as várias teorias apresentem percursos semelhantes para explicar a construção dos conceitos matemáticos, parece ser importante coordenar os vários contributos dados por cada uma delas em separado. Assim, partindo do princípio que a teoria da reificação explica a evolução dos conceitos, partindo dos objectos mais elementares para os mais complexos, a visão proceptual destes objectos vem-nos ajudar a compreender como o conhecimento matemático pode ser compactado e representado por meio de símbolos, tornando-se assim mais fácil de manejar e a teoria APOS fornece-nos mecanismos que nos permitem avaliar a compreensão dos alunos de determinados objectos matemáticos, nomeadamente, no balanço entre o capsular e descapsular desses objectos. É assim importante ter em conta estas características das várias teorias com o objectivo de estabelecer os níveis de conceito imagem que melhor traduzam a compreensão dos vários conceitos matemáticos estudados.

Domingos (2003) acrescenta que o seu estudo é um valor acrescentado à teoria já desenvolvida sobre as noções de conceito definição e conceito imagem. Faz uma contextualização de como tais conceitos eram considerados por Vinner e por Tall. O primeiro considerava-os como sendo duas células distintas na mente do indivíduo. O segundo admitiu que ambos conceitos faziam parte da mesma estrutura cognitiva, estrutura dominada pelo conceito imagem, mas tendo tanto o conceito imagem como o conceito definição como partes integrantes. Embora, a categorização de Tall tenha sido bastante utilizada em diversos trabalhos de investigação e considerada bastante útil, Domingos (2003) aponta nela limitações particularmente na forma como explica os processos que estão associados à construção de conceitos e afirma:

> A categorização dos conceitos imagem que proponho neste trabalho representa um avanço para a teoria, permitindo que seja possível “medir” a complexidade destes conceitos imagem. É, assim, possível estabelecer uma hierarquia que vai dos conceitos imagem incipientes até aos conceitos imagem relacionais e ao mesmo tempo avaliar o seu grau de complexidade com base nos diferentes domínios identificados que são característicos de cada uma destas categorias. (Domingos, 2003, p. 345)

Caraterísticas dos conceitos imagem

A partir dos dados estudados, Domingos (2003) pôde agrupar os níveis de conceito imagem que podem (co)existir na mente do aluno em três meta-categorias: conceito imagem incipiente, instrumental e relacional. Considera-se conceito imagem incipiente aquele que está mais próximo à Matemática Elementar, considera-se conceito imagem relacional aquele próximo à Matemática Avançada e considera-se conceito imagem instrumental o que se encontra a nível intermédio, na zona de transição entre os dois anteriores. Para chegar à categoriazação acima, o autor teve em conta diferentes domínios utilizados nas teorias cognitivas consideradas no estudo: objetos, processos, tradução entre representações, principais propriedades e pensamento proceptual.

1.7.3 Habilidades fundamentais de raciocínio que promovem coerência na compreensão de função dos Alunos

Para Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008) o conceito de função é central para a aprendizagem da Matemática a nível de graduação, fundamental para a Matemática moderna e essencial para as ciências. Consideram também que o seu empobrecido entendimento contribui para o insucesso escolar. Os autores defendem um ensino que promova conceções ricas, habilidades de raciocínio poderosas de modo a despertar curiosidade e interesse nos alunos e, consequentemente, sucesso escolar.

> The concept of function is central to undergraduate mathematics, foundational to modern mathematics, and essential in related areas of the sciences. A strong understanding of the function concept is also essential for any student hoping to understand calculus – a critical course for the development of future scientists, engineers, and mathematicians. (...) This impoverished understanding of a central concept of secondary and undergraduate mathematics likely results in many students discontinuing their study of mathematics. (…) We advocate that instructional shifts that promote rich conceptions and powerful reasoning abilities may generate students' curiosity and interest in mathematics, and subsequently lead to increases in the number of students who continue their study of mathematics.[26] (Oehrtman, Carlson, & Thompson, 2008, p. 150)

Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), apoiados nas estruturas mentais ação e processo da teoria APOS, caraterizam comparativamente as visões de ação e de processo dos alunos sobre funções (Tabela 8). Fazem recomendações sobre como passar de uma visão para outra: (1) Pedir aos alunos que expliquem os factos básicos da função em termos de entrada e saída; (2) Perguntar sobre o comportamento de funções em intervalos inteiros, além de pontos únicos; (3) Pedir aos alunos para fazer e comparar julgamentos sobre funções em várias representações.

Tabela 8: Visão de ação e de processo das funções (Oehrtman, Carlson, & Thompson, 2008, p. 36)

Visão de ação	**Visão de processo**
Uma função está vinculada a uma regra, fórmula ou computação específica e requer a conclusão de cálculos e/ou etapas específicos.	Uma função é um processo de entrada-saída generalizado que define um mapeamento de um conjunto de valores de entrada para um conjunto de valores de saída.
Um aluno deve executar ou imaginar *cada ação*.	Um aluno pode imaginar *todo o processo* sem ter que executar cada ação.
A "resposta" depende da fórmula.	O processo é independente da fórmula.
Um aluno só pode imaginar um único valor de cada vez como entrada ou saída (por exemplo, x representa um número específico).	Um aluno pode imaginar todas as entradas de uma vez ou "percorrer" um contínuo de entradas. Uma função é uma transformação de espaços inteiros.
Composição é substituir uma fórmula ou expressão por x.	Composição é uma coordenação de dois processos de entrada-saída; a entrada é

[26] O conceito de função é fundamental para a Matemática de graduação, fundamental para a Matemática moderna e essencial em áreas afins das ciências. Uma forte compreensão do conceito de função também é essencial para qualquer aluno que queira entender o Cálculo - um curso crítico para o desenvolvimento de futuros cientistas, engenheiros e matemáticos. (...) Este entendimento empobrecido de um conceito central de Matemática secundária e de graduação provavelmente resulta em muitos estudantes descontinuando seus estudos de Matemática. (…) Defendemos que as mudanças instrucionais que promovem conceções ricas e habilidades poderosas de raciocínio podem gerar curiosidade e interesse dos alunos em matemática e, consequentemente, levar ao aumento do número de alunos que continuam seus estudos de matemática.

	processada por uma função e a sua saída é processada por uma segunda função.
A função inversa é sobre álgebra (mude y e x, em seguida, resolva) ou geometria (reflita através de $y = x$.	A função inversa é a reversão de um processo que define um mapeamento de um conjunto de valores de saída para um conjunto de valores de entrada.
Encontrar domínio e contradomínio é concebido, no máximo, como um problema de álgebra (por exemplo, o denominador não pode ser zero e o radicando não pode ser negativo).	Domínio e contradomínio são produzidos operando e refletindo sobre o conjunto de todas possíveis entradas e saídas.
Funções são concebidas como estáticas.	Funções são concebidas como dinâmicas.
O gráfico de uma função é uma figura geométrica.	O gráfico de uma função define um mapeamento específico de um conjunto de valores de entrada para um conjunto de valores de saída.

Segundo Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), a aplicação do raciocínio covariacional é uma forma de se construir a visão de processo das funções. Os autores decompõem o raciocínio covariacional em cinco ações mentais e nos respetivos comportamentos exteriorizados pelos alunos (Tabela 9).

Tabela 9: Ações mentais do quadro de covariação (Oehrtman, Carlson, & Thompson, 2008, p. 40)

Ação mental	**Descrição da ação mental**	**Comportamento**
Ação mental 1 (AM1)	Coordenar a dependência de uma variável noutra variável	Rotular os eixos com indicações verbais de coordenar as duas variáveis (por exemplo, y muda com mudanças em x)
Ação mental 2 (AM2)	Coordenar a direção da mudança de uma variável com mudanças na outra variável	• Construir uma linha reta com o declive diferente de zero • Verbalizar a consciência da direção da mudança da saída, considerando mudanças na entrada
Ação mental 3 (AM3)	Coordenar a quantidade de mudança de uma variável com alterações na outra variável	• Representar pontos/contruir retas secantes • Verbalizar consciência da quantidade de mudança da saída enquanto considera mudanças na entrada
Ação mental 4 (AM4)	Coordenar a taxa média de variação da função com incrementos uniformes de	• Construir retas secantes para intervalos contíguos no domínio

	variação na variável de entrada	• Verbalizar consciência da taxa de variação da saída (em relação à entrada) enquanto considera incrementos uniformes da entrada
Ação mental 5 (AM5)	Coordenar a taxa de variação instantânea da função com variações contínuas na variável independente para todo o domínio da função	• Construir uma curva suave com indicações claras de variação de concavidade • Verbalizar consciência das variações instantâneas na taxa de variação para todo o domínio da função (a direção das concavidades e os pontos de inflexão estão corretos)

Em síntese, o que os autores fazem é uma descrição das estruturas mentais ação e processo, bem como do mescanismo mental interiorização, como forma de se transitar da primeira estrutura mental para a segunda. Os autores apresentam atividades desenvolvidas com funções, descrevem e fundamentam os fenómenos associados às mesmas e, mais adiante, caraterizam as estruturas mentais e o mecanismo mental de transição entre elas.

1.7.4 Avaliação do Conceito de Pré-Cálculo e Prontidão do Conceito de Cálculo

Carlson, Oehrtman, & Engelke (2010) apresentam-nos a Taxonomia de Avaliação do Conceito do Pré-Cálculo (ACP) — Precalculus Concept Assessment (PCA) Taxonomy — como base de construção do instrumento com o mesmo nome (Tabela 10).

Tabela 10: Taxonomia de Avaliação de Conceito do Pré-Cálculo (ACP) (Carlson, Oehrtman, & Engelke, 2010, p. 120)

Habilidades de raciocínio	
R1	Visão de processo de função. Ver a função como um processo generalizado que aceita entradas e produz saídas. Coordenação apropriada de múltiplos processos de função.
R2	Raciocínio covariacional. Coordenar duas grandezas variadas que mudam em conjunto, enquanto considera como as quantidades mudam em relação umas às outras.
R3	Habilidades computacionais. Identificar e aplicar manipulações e procedimentos algébricos apropriados para apoiar a criação e o raciocínio sobre modelos de função.
Conpreensões	
Compreender significados de conceitos de função	
SA	Avaliação de função
ST	Taxa de variação
SC	Composição de função
SI	Inversa de função
Compreender taxa de **c**rescimento de tipos de função	
CL	Linear
CE	Exponencial
CR	Racional

CN	Não linear geral
Compreender **r**epresentações de função (interpretar, usar, construir, conectar)	
RG	Gráfica
RA	Algébrica
RN	Numérica
RC	Contextual

Carlson, Madison, & West (2015) apresentam-nos a taxonomia da Prontidão do Conceito de Cálculo (PCC) — Calculus Concept Readiness (CCR) — (Tabela 11) como base de construção do instrumento, com o mesmo nome, de avaliação das habilidades de raciocínio e das compreensões fundamentais para a aprendizagem do Cálculo. "The CCR is a 25-item multiple-choice instrument that can be used as a placement test for entry into calculus and to assess the effectiveness of precalculus level instruction."[27] (Carlson, Madison, & West, 2015, p. 209). O PCC é um instrumento de 25 itens feito com base na taxonomia de 23 itens do PCC (Tabela 11). Os 23 itens da taxonomia estão distribuídos em cinco categorias, nomeadamente (1) Habilidade de raciocínio; (2) Compreender, representar e interpretar padrões de crescimento de função; (3) Compreender e usar os seguintes conceitos ou ideias; (4) Compreender ideias centrais da trigonometria; (5) Outras habilidades. Sobre o PCC os autores afirmam:

> The CCR is a 25 item multiple-choice exam with each question having five answer choices. Eighteen of the twenty-five CCR items assess or rely on student understanding of the function concept. Five items assess student understanding or use of trigonometric functions, and four items assess student understanding or ability to use exponential functions. Ten items are situated in an applied (or word problem) context and require students to reason about quantities and use ideas of function, function composition, or function inverse to represent how the quantities change together.[28] (Carlson, Madison, & West, 2015, p. 215)

Tabela 11: Taxonomia de Prontidão do Conceito de Cálculo (PCC) (Carlson, Madison, & West, 2015, p. 216)

Habilidades de **r**aciocínio	
R1	Raciocínio proporcional: Observar que duas grandezas que estão a mudar juntas estão relacionadas por um múltiplo constante e que, à medida que as duas grandezas mudam juntas, a proporção de uma grandeza para a outra

[27] O PCC é um instrumento de múltipla escolha com 25 itens que pode ser usado como um teste de admissão ao Cálculo e para avaliar a eficácia da instrução do nível de Pré-Cálculo."

[28] O PCC é um exame de múltipla escolha de 25 itens, com cada questão tendo cinco opções de resposta. Dezoito dos vinte e cinco itens do PCC avaliam ou assentam na compreensão do aluno sobre o conceito de função. Cinco itens avaliam a compreensão do aluno ou o uso de funções trigonométricas, e quatro itens avaliam a compreensão do aluno ou a capacidade de usar funções exponenciais. Dez itens estão situados num contexto aplicado (ou problema com texto) e exigem que os alunos raciocinem sobre as quantidades e usem ideias de função, composição de função ou função inversa para representar como as grandezas variam juntas.

	permanece constante; em seguida, usar esse conhecimento para determinar novos valores de uma grandeza para valores específicos da outra grandeza.
R2	Visão de processo da função: visualizar uma função como um processo que mapeia valores de entrada do domínio de uma função para gerar valores no intervalo de uma função.
R3	Raciocínio quantitativo e covariacional: Conceituar grandezas em situações e raciocinar sobre como duas grandezas numa situação mudam juntas.
Compreender, representar e interpretar padrões de crescimento de **f**unção	
F1	Linear
F2	Exponencial
F3	Polinomial não linear
F4	Racional
F5	Periódica
Compreender e **u**sar os seguintes conceitos ou ideias	
U1	Grandeza
U2	Variável
U3	Inclinação / Taxa constante de variação
U4	Taxa média de variação
U5	Composição de função
U6	Função inversa
U7	Translações (horizontais e verticais) de funções
Compreender ideias centrais da **t**rigonometria	
T1	Medida de ângulo
T2	Radiano como unidade de medida
T3	As funções seno e cosseno como a covariação do comprimento de um arco (medido em unidades do raio do círculo) e a coordenada horizontal ou vertical do terminal do arco (medida em unidades do raio do arco). Essas questões exploram a ideia de que cada círculo pode ser considerado um círculo unitário.
T4	As funções seno e cosseno como uma representação da relação entre uma medida de ângulo e os lados de um triângulo retângulo.
Outras **h**abilidades	
H1	Resolver equações
H2	Representar e interpretar inequações
H3	Usar e resolver sistemas de equações
H4	Compreender e usar a notação de função para expressar uma grandeza em termos de outra

Sobre o PCC e sua taxonomia, Carlson, Madison, & West (2015) apresentam conclusões de grande interesse para a presente tese. Os autores apresentam-no como um bom caraterizador da aprendizagem dos alunos independentemente dos resultados de outras avaliações a que estes sejam submetidos antes ou depois da lecionação do Cálculo. O instrumento e a sua taxonomia permitem medir o nível de preparação dos alunos para frequentar a unidade curricular de maneira objetiva. Por outro lado, após a lecionação do Cálculo, permite medir o alcance das avaliações a que os alunos tiverem sido submetidos. Deste modo, com instrumentos do género, consegue-se aferir o papel dos conhecimentos prévios na aprendizagem do Cálculo, consegue-se aferir o nível de compreensão de conceitos do Cálculo, em suma, consegue-se aferir o nível de realização curricular.

> A CCR cut score of 11 out of 25 (44%) is a relatively low score on an exam that assesses fundamental ideas and reasoning abilities for calculus, suggesting that many students are succeeding in Calculus 1 without the prerequisite knowledge. The CCR break points of 11 and 9 that our data suggests could be used to advise students relative to whether they should (or should not) enroll in Calculus 1 are separated by only two CCR items. This implies small differences in the initial knowledge base of students who pass Calculus 1, and those who fail Calculus 1.[29]
>
> (…)
>
> Our analysis of the CCR data suggests that it is useful as a tool to assess the effectiveness of a precalculus course or curriculum in preparing students for calculus. It can also be used to advise students about their readiness for calculus. We expect that CCR correlations with success in calculus will be higher when administered as a pre-test to students enrolled in calculus courses that emphasize understanding (making connections) and reasoning with ideas. Even though calculus courses vary in the amount of emphasis placed on skills, techniques, and understanding and using key concepts, we believe that CCR is a good measure of whether students are prepared to learn and understand calculus. However, we encourage those who administer CCR to Calculus 1 students to use the cut scores that we have suggested as advisory, and to consider local constraints and current curriculum foci in precalculus and beginning calculus to adjust break points accordingly.[30] (Carlson, Madison, & West, 2015, pp. 228-230)

Apesar do valor do instrumento PCC e dos seus critérios, os autores deixam aberta a possibilidade de ajustes às condições e ao currículo locais. Fica clara a flexibilidade do instrumento sem, no entanto, perder a sua essência constante da sua taxonomia. Um aproveitamento mínimo de 44% num teste do PCC é o recomendável para a frequência da unidade curricular Cálculo.

---

[29] Uma pontuação de corte do PCC de 11 em 25 (44%) é uma pontuação relativamente baixa num exame que avalia ideias fundamentais e habilidades de raciocínio para cálculo, sugerindo que muitos alunos estão a obter sucesso no Cálculo 1 sem o conhecimento prévio. Os pontos de quebra do PCC de 11 e 9 que nossos dados sugerem que poderiam ser usados para aconselhar os alunos em relação a se devem ou não devem se inscrever no Cálculo 1 são separados por apenas dois itens do PCC. Isso implica pequenas diferenças na base de conhecimento inicial dos alunos que passam no Cálculo 1 e naqueles que falham no Cálculo 1.

[30] Nossa análise dos dados do PCC sugere que é útil como uma ferramenta para avaliar a eficácia de um curso ou currículo de Pré-Cálculo na preparação dos alunos para o Cálculo. Também pode ser usado para aconselhar os alunos sobre sua prontidão para o Cálculo. Esperamos que as correlações de PCC com sucesso no cálculo sejam maiores quando administradas como um pré-teste para alunos matriculados em cursos de cálculo que enfatizam a compreensão (fazendo conexões) e raciocinando com ideias. Embora os cursos de cálculo variem em termos de ênfase em habilidades, técnicas e compreensão, e usando conceitos-chave, acreditamos que o PCC é uma boa medida se os alunos estão preparados para aprender e entender o Cálculo. No entanto, encorajamos aqueles que administram PCC para que os alunos do Cálculo 1 usem as pontuações de corte que sugerimos como consultivas, e consideremos as restrições locais e os atuais focos curriculares no Pré-Cálculo e no Cálculo inicial para ajustar os pontos de quebra em conformidade.

Um dos conceitos fundamentais para os alunos na aprendizagem do Cálculo é o de variável, aliás como também é reconhecido pela Taxonomia de PCC (Tabela 11). Trigueros & Usini (2003), com os objetivos de (1) analisar as dificuldades dos alunos, (2) fazer observações em sala de aula, (3) dar tratamento a livros didáticos e de (4) desenvolver e testar design instrutivo, criaram o “Modelo de 3 Usos da Variável (3UV)”. Neste modelo as variáveis são classificadas em três categorias: incógnita, número genérico e variáveis relacionadas. Incógnita é um símbolo cujo valor pode ser encontrado mediante resolução. Número genérico refere-se ao significado associado ao símbolo em expressões genéricas em que seja necessário realizar operações algébricas. Um caso particular dos números genéricos são os parâmetros. Variáveis relacionadas são as que constituem os símbolos dependente e independente como, por exemplo, numa relação funcional.

> (…) It is hard for them [students] to consider symbols sometimes as variables related in a function, at other times as unknown numbers to be found, and at still other times as general numbers. (By “general number” we mean a symbol whose value is neither assigned throughout the solution process nor is to be determined at the final stage of the solution process.) Yet many teachers say ‘variable’ for all these different instances of symbol. Using the same name for a symbol that plays a variety of roles is very confusing to students. Most of them think of symbols as unknowns that have to be found no matter where they appear; a few consider them as standing for any number and they know how to operate on them procedurally; but all students have difficulty integrating all the different meanings of what mathematicians call ‘variable.’ Because the term ‘variable’ covers a variety of uses of letters and lacks an analytic definition, it should be no surprise that attaining a well-developed robust variable conception is problematic for students.[31] (Trigueros & Jacobs, 2008, pp. 3 e 4)

Trigueros & Jacobs (2008) exemplificam como, durante uma resolução, as variáveis tomam diferentes significados em diferentes etapas. Os autores concluem que o conceito de variável é muito complexo e que os alunos precisam de ajuda para construir uma conceção rica a respeito. Do que foi exposto sobre variáveis, claro que, para construção de conceitos do Cálculo e para o sucesso na unidade curricular, a compreensão do conceito de variável e a fluência no seu tratamento são importantes para uma boa aprendizagem dos alunos, consequentemente, o conceito de variável é importante para a caraterização da aprendizagem do Cálculo.

---

[31] (…) É difícil para eles [alunos] considerar os símbolos às vezes como variáveis relacionadas numa função, outras vezes como incógnitas, e outras vezes como números gerais. (Por "número geral" entendemos um símbolo cujo valor não é atribuído durante todo o processo de solução nem deve ser determinado no estágio final do processo de solução.) No entanto, muitos professores dizem "variável" para todos esses diferentes exemplos de símbolo. Usar o mesmo nome para um símbolo que desempenha várias funções é muito confuso para os alunos. A maioria deles pensa em símbolos como incógnitas que devem ser encontradas, não importa onde eles apareçam; alguns os consideram como representando qualquer número e sabem como operá-los processualmente; mas todos os alunos têm dificuldade em integrar todos os diferentes significados do que os matemáticos chamam de 'variável'. Como o termo 'variável' abrange uma variedade de usos de letras e carece de uma definição analítica, não deve ser surpresa que seja problemático para o aluno atingir uma conceção de variável robusta bem desenvolvida.

CAPÍTULO 2. Metodologia

2.1 Paradigmas de investigação

Pode-se afirmar que paradigma de investigação é um conjunto coerente de postulados, valores, teorias e regras aceites pelos membros de uma comunidade científica num determinado período histórico. Sendo assim, constitui-se também num meio de legitimação e validação, respetivamente, de trabalho e resultados apresentados por investigadores.

> [Paradigma] De um lado, indica toda a constelação de crenças, valores, técnicas, etc…, partilhadas pelos membros de uma comunidade determinada. De outro, denota um tipo de elemento dessa constelação: as soluções concretas de quebra-cabeças que, empregadas como modelos ou exemplos, podem substituir regras explícitas como base para a solução dos restantes quebra-cabeças da ciência normal. (Khun, 1998, p. 218).

Coutinho (2014) considera que existem três paradigmas de investigação: positivista, interpretativo e crítico. Quanto ao design de investigação, Creswell (2014) considera a existência de três: quantitativo, qualitativo e misto. Em função da natureza do problema da nossa investigação que passa por caraterizar a aprendizagem de alunos, fazendo descrições da mesma, adotamos o paradigma interpretativo. Quanto ao design da investigação, adotámos o qualitativo, mais concretamente estudo de caso, por nos permitir tornar mais profunda a caraterização que se pretende. A escolha justifica-se se atendermos ao problema de investigação levantado que sugere uma abordagem do quotidiano académico dos alunos, bem como atendendo à necessidade de se ter informação pormenorizada em torno do mesmo problema para melhor informar o público interessado na investigação.

2.1.1 Investigação qualitativa

O paradigma escolhido para servir de base a esta investigação é o qualitativo, também designado por hermenêutico, interpretativo ou naturalista. Desta maneira, a investigação assentará na busca pela compreensão, significado e ação, penetrando no mundo pessoal dos sujeitos envolvidos no estudo, professores e alunos. (Creswell, 2014).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), as principais características do paradigma qualitativo são cinco e não têm que estar todas presentes numa investigação com o mesmo nível de profundidade.

A primeira característica refere-se ao facto de na investigação qualitativa a fonte directa de dados ser o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal. O investigador acaba sempre por se introduzir, com maior ou menor grau, no ambiente onde pretende recolher os dados e quer esteja munido ou não de alguns equipamentos de vídeo ou áudio ou apenas de papel e lápis, acaba sempre por desempenhar um papel primordial na sua análise. É ele que tem que rever na totalidade os materiais registados, sendo o seu entendimento sobre esses materiais o principal instrumento de análise. A frequência dos locais de estudo é essencial para compreender o contexto e as acções pois estas são observadas no seu ambiente natural. Com vista a não perder o significado, o investigador não deve separar os actos, palavras ou gestos do seu contexto.

A segunda característica está relacionada com o facto de a investigação qualitativa ser descritiva. Os dados recolhidos são quase sempre organizados sob a forma de palavras ou imagens, em vez de números. Os investigadores procuram analisar os dados usando toda a sua riqueza e respeitando a forma em que eles foram registados ou transcritos. Tudo deve ser analisado com base no princípio de que nada é trivial e que tudo pode vir a constituir uma pista para estabelecer uma maior compreensão do objeto de estudo. Assim, quando se pretende que sejam tidos em conta todos os detalhes, a descrição parece ser um bom método de recolha de dados.

A terceira característica está relacionada com o facto de os investigadores qualitativos se interessarem mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados e produtos. A forma como as pessoas negoceiam os significados, como começam a utilizar certos termos ou como certas noções começam a fazer parte do senso comum são indicadores de que na actividade dos investigadores os processos desempenham um papel primordial. Tomando como exemplo a investigação educacional, a ênfase qualitativa no processo tem sido importante no desenvolvimento da ideia de que o desempenho cognitivo dos alunos é afectado pelas expectativas dos professores. Esta conclusão, que é corroborada pelos métodos quantitativos, encontra nas estratégias qualitativas uma forma de evidenciar como as expectativas se traduzem nas actividades, procedimentos e interações diárias.

A quarta característica está relacionada com a forma como os investigadores qualitativos analisam os dados, admitindo uma tendência para que esta análise seja feita de forma indutiva. A recolha de dados não é feita com o objectivo de provar hipóteses previamente estabelecidas, mas antes para construir abstrações com base no agrupamento dos dados particulares. A teoria é assim construída com base nas várias peças individuais da informação recolhida que se vão inter-relacionando, dando origem àquilo que se pode designar por teoria fundamentada. O investigador vai usar parte do estudo para perceber quais são as questões importantes, ao invés de partir do pressuposto que já sabe essas questões antes de efectuar a investigação.

A quinta e última característica prende-se com o significado, que é considerado de importância vital para a abordagem qualitativa. Os investigadores qualitativos têm como principal preocupação certificarem-se que estão a apreender as diferentes perspectivas adequadamente. Por vezes os dados recolhidos são de novo mostrados aos indivíduos sobre os quais incide a investigação, por forma a poder proporcionar ao investigador a segurança de que os registos são rigorosos e reflectem de forma clara os significados que os sujeitos lhe atribuíram. Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhe permitem tomar em consideração as experiências do ponto de vista do sujeito.

Pretende-se com este estudo caraterizar a aprendizagem dos alunos e identificar cenários metodológicos que favoreçam a aprendizagem do Cálculo, considerando os seguintes objetivos específicos: (1) Caraterizar o nível de preparação dos alunos para a aprendizagem do Cálculo; (2) Descrever o papel dos conhecimentos prévios na aprendizagem dos novos conceitos do Cálculo; (3) Caraterizar a aprendizagem dos alunos ao longo do estudo de tópicos específicos do Cálculo. Para a validação dos resultados apoiaremo-nos em quatro pilares definidos por Lincoln e Guba (1991): credibilidade, transferibilidade, consistência e aplicabilidade ou confirmabilidade.

A credibilidade consiste na confirmação dos resultados por parte dos participantes na investigação. Tem a ver com o quanto as construções/reconstruções do investigador reproduzem os fenómenos em estudo e/ou os pontos de vista dos participantes na pesquisa. Obtém-se a credibilidade "submetendo [os resultados] à aprovação dos construtores das múltiplas realidades em estudo" (Lincoln & Guba, 1991, p. 296). A credibilidade pode ser operacionalizada através do "prolonged engagement" (Lincoln & Guba, 1991), através do "peer debriefing" (Erlandson et al., 1993), ou através do "member checks" (Coutinho, 2014). A credibilidade é o termo homólogo à "validade interna" do paradigma quantitativo.

"Prolonged engagement" — empenho prolongado — é um investimento no tempo que se considere necessário para atingir os objetivos da pesquisa que passa por aprender a cultura dos participantes, testar informações contraditórias introduzidas por distorções tanto do investigador como dos participantes e criar confiança nos participantes. "Peer debriefing" — revisão de pares — consiste em permitir que um par, um colega ou um profissional fora do contexto com conhecimento geral sobre a problemática e sobre o processo de pesquisa, analise os dados, teste as hipóteses de trabalho e sobretudo escute as ideias e preocupações do investigador. "Member checks" — revisão pelos participantes — consiste em devolver aos participantes do estudo os resultados da análise feita pelo investigador às informações que lhe forneceram através de entrevistas, observações diretas ou indirectas, para que estes possam verificar/confirmar se as interpretações do investigador refletem de facto as suas experiências/sentimentos.

Segundo Coutinho (2014), a transferibilidade, numa pesquisa qualitativa, consiste na possibilidade de os resultados obtidos num determinado contexto poderem ser aplicados noutro contexto. É o conceito correspondente ao de "generalização" ou "validação externa" na metodologia quantitativa, mas que deve ser encarado em termos totalmente distintos na pesquisa interpretativa. Podem-se considerar três graus ou níveis de generalização dos resultados de um estudo empírico: da amostra para a população, analítica e a relacionada à teoria. No plano qualitativo a generalização é analítica ou relacionada à teoria.

Para Coutinho (2014), a consistência é a capacidade de replicar o estudo, o que é possível se os instrumentos de pesquisa forem "neutros", ou seja, aplicados outra vez produzem os mesmos resultados. Na pesquisa qualitativa este tipo de replicabilidade é impossível de conseguir fruto da flexibilidade do desenho, da constante interação entre investigador e participantes que levam a que os resultados sejam "irrepetíveis". Deste modo, nos estudos qualitativos a questão da consistência pode ser enunciada da seguinte forma: "Se outra pessoa fizesse o mesmo estudo, obteria os mesmos resultados e chegaria às mesmas conclusões a que chegou o investigador?". Portanto, traduz-se na obtenção dos mesmos resultados e conclusões de um mesmo estudo, mas com participantes diferentes. No paradigma quantitativo o conceito equivalente é o de fiabilidade.

Segundo Lincoln & Guba (1991), aplicabilidade ou confirmabilidade é a capacidade de outros investigadores confirmarem as construções do investigador. No paradigma quantitativo o conceito equivalente é o de objetividade.

Tendo em conta a natureza do problema em estudo e as questões de investigação, optámos por uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa. Esta metodologia mostra-se como a opção mais adequada por permitir caraterizar com profundidade os desempenhos dos alunos em diferentes etapas da lecionação da unidade curricular Matemática I. A análise, de natureza interpretativa, dos dados recolhidos consiste no processo de busca e organização sistemática de material documental, respostas a questionários, bem como transcrições de entrevistas. Procurámos, tendo em conta Merriam (1988), analisar os dados a três níveis: (1) organização dos dados recolhidos; (2) estabelecimento de categorias; (3) clarificação do significado dos dados e da sua influência na compreensão do fenómeno em estudo.

2.2 Estrutura (design) da investigação

2.2.1 Problema

Tomámos como problema o objetivo geral da investigação: "Como interpretar fenómenos observados na aprendizagem do Cálculo à luz das teorias APOS e da Reificação, ambas da Educação Matemática?". Deste modo, destacamos dois focos de incidência da investigação: o papel de conhecimentos prévios na aprendizagem de conceitos do Cálculo; caraterísticas das aprendizagens realizadas pelos alunos no estudo de tópicos de Cálculo.

2.2.2 Amostra

Para Bravo, citada por Coutinho (2014), seis modalidades de amostragem intencional podem integrar um estudo de caso: amostras extremas; amostras de casos típicos ou especiais; amostras de variação máxima, adaptadas a diferentes condições; amostras de casos críticos; amostras de casos sensíveis ou politicamente importantes; amostras de conveniência.

Claro está que no estudo qualitativo a técnica de amostragem é não probabilística e é orientada por intencionalidade, este estudo não foi exceção. Aqui, utilizámos a modalidade de amostras de conveniência. Com o objetivo de reunir casos de aprendizagem em situação normal de aprendizagem, em situação de melhor preparação para a aprendizagem de conceitos do Cálculo, estabelecemos alguns critérios que se encontram nos instrumentos de recolha de dados. Desta maneira, evitámos trazer para este estudo abordagens sobre a normalização da situação de aprendizagem dos alunos e direcionámos o nosso foco para a sua aprendizagem.

São fatores que desencadeiam mecanismos de normalização da situação de aprendizagem o atraso escolar, o curso frequentado antes, para o caso no ensino secundário, o tempo de paragem nos estudos, a condição laboral do aluno, o tempo disponível para os estudos, entre outros. Não queremos com isso dizer que aos alunos do primeiro ano do curso de Contabilidade e Gestão — alunos estudados — não é permitido o exercício de alguma atividade extraescolar, não é permitido o atraso escolar, entre outras situações, não, não se trata disso. Trata-se de reunir requisitos mínimos que permitam desenvolver a sua aprendizagem com influência reduzida de fatores externos a si.

O trabalho de campo, incluindo a recolha de dados, foi feito ao longo do ano letivo[32] 2016. O ano 2015 foi preparatório, portanto, de interação prévia com a instituição e,

[32] Os anos letivos no Subsistema do Ensino Superior em Angola começam no mês de março e terminam no de novembro.

em particular com a professora de Matemática I. O ano letivo 2016 foi de recolha efetiva de dados principalmente ao longo do primeiro semestre, período em que se lecionou a unidade curricular. Foram elaborados e aplicados dois questionários, nomeadamente (1) questionário de caraterização dos alunos, (2) questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos. O 1.º questionário foi de aplicação mais abrangente, pois foi aplicado aos 160 alunos constituintes da população do nosso estudo. Felizmente, por serem alunos de duas turmas, matinal e noturna, controladas pela mesma professora e na mesma instituição de formação, o retorno dos questionários preenchidos foi de 97%. Os alunos receberam-no como atividade a desenvolver nos dois primeiros dias de aula e apresentaram-no no segundo e no terceiro dias de aula, 140 no segundo dia de aula e 15 no terceiro dia. Apesar de se pedir os nomes dos participantes nos questionários, ao serem aplicados, sempre se frisou que a confidencialidade dos dados recolhidos estava garantida.

Selecionámos 10 alunos que não tinham atraso escolar, que frequentaram o curso de Ciências Físicas e Biológicas no Ensino Secundário, sem paragem nos estudos do Ensino Secundário para o Ensino Superior, que não trabalhavam e que tinham disponibilidade para se dedicar aos estudos em horário extraescolar. Portanto, os alunos em melhores condições de aprendizagem nos critérios considerados para a seleção da amostra. O questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3) foi aplicado aos 10 alunos selecionados, no quarto dia de aula, à margem da aula, em ambiente vigiado, durante quatro tempos, com tolerância de um tempo, conforme solicitação dos alunos. Com os dados obtidos da aplicação deste instrumento analisou-se, à luz das teorias APOS e da Reificação, os níveis de compreensão e de desempenho dos alunos no início do Ensino Superior. Por conveniência de estudo — conveniência assente na necessidade de estudarmos o nível de compreensão de conceitos a nível do Ensino Superior —, para a fase seguinte (análise às provas parcelares) da investigação selecionámos os três alunos com níveis de compreensão de conceitos e com desempenho predominantemente a nível de processo ou de objeto. Esta seleção criterial de três alunos permitiu-nos responder a segunda questão de investigação, o que se fez, em grande parte, por via dos seus desempenhos nas provas parcelares. A primeira prova parcelar foi aplicada na sexta semana de aula e a segunda na décima segunda semana de aula.

2.2.3 Palavras-chave

Para esta investigação, destaca-se as seguintes palavras-chave: Cálculo, Função, Cálculo diferencial, Cálculo integral, Aprendizagem do Cálculo, Conceitos do Cálculo.

Cálculo: trata-se de uma área da Matemática, desenvolvida a partir da Álgebra e da Geometria, cujo objeto de estudo são taxas de variação de grandezas e a acumulação de quantidades, geralmente através de funções. O Cálculo é empregue no estudo de movimento ou de crescimento em situações em que forças variáveis agem produzindo aceleração. Como exemplos de variação de grandezas temos a variação da inclinação de uma curva, a variação da velocidade de um ponto de um corpo, a variação de preços de um bem ou de um serviço, entre outros. Como exemplo da acumulação de grandezas temos a área debaixo de uma curva, o volume de um sólido, o cálculo de trabalho como grandeza física, entre outros exemplos.

Função: é o objeto de estudo do Cálculo.

Cálculo Diferencial: é a subárea do Cálculo que lida especificamente com o estudo de taxas de variação de grandezas.

Cálculo Integral: é a subárea do Cálculo que lida especificamente com o estudo de acumulação de quantidades.

Aprendizagem do Cálculo: é um assunto que tem merecido muitas abordagens dentro da Educação Matemática. Para tal, teorias foram desenvolvidas e continuam a ser desenvolvidas para maior e melhor compreensão deste fenómeno.

Conceitos de Cálculo. Para efeitos deste estudo são considerados os conceitos de função, derivada de uma função e integral de uma função.

2.2.4 Instrumentos e técnicas de recolha de dados

As inquietações acumuladas pelo investigador através da sua experiência profissional, as inquietações surgidas ao longo da revisão de literatura, bem como aquelas consequentes do intercâmbio com os seus pares serviram de base para a elaboração de instrumentos de investigação que, certamente, a partir duma dimensão qualitativa, permitiram obter novos factos. Tais factos antes de serem tomados como tais foram submetidos à apreciação de alunos, de docentes e de pares do investigador que, por uma questão de validação, tiveram algo a dizer sobre as conclusões tiradas a seu respeito.

O foco da investigação são pessoas, objectos e acontecimentos. Os tipos de dados com que lidámos são descrições, opiniões, análises, pontuações, medições, entre outros. As fontes de dados são os participantes, processos, contextos, objetos, registos e documentos. A recolha de dados foi feita através de notações, descrições, análises e inquéritos. Os instrumentos considerados para a recolha de dados estão subdivididos em três grupos questionários, grelhas de observação e entrevistas.

Questionários

Para Marconi e Lakatos (2003), o questionário é um instrumento de recolha de dados, constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do entrevistador. De uma maneira geral, o investigador envia o questionário ao informante por correio ou por um portador. Depois de preenchido, o informante devolve pela mesma via. Anexo ao questionário ou dentro dele como parte introdutória, deve-se fazer constar uma nota explicando a natureza da investigação, a sua importância, bem como a necessidade de se obter respostas. Desta maneira, desperta-se o interesse do recetor de tal forma que se dedique no preenchimento do questionário e o devolva em tempo útil. De uma maneira geral, a percentagem de questionários preenchidos e devolvidos é baixa. Segundo as autoras o questionário tem as seguintes vantagens:

a) Economiza tempo, viagens e obtem grande número de dados;
b) Atinge maior número de pessoas simultaneamente;
c) Abrange uma área geográfica mais ampla;
d) Economiza pessoal, tanto em adestramento quanto em trabalho de campo;
e) Obtém respostas mais rápidas e mais precisas;
f) Há maior liberdade nas respostas, em razão do anonimato;

g) Há mais segurança, pelo facto de as respostas não serem identificadas;
h) Há menos risco de distorção, pela não influência do pesquisador;
i) Há mais tempo para responder em hora mais favorável;
j) Há mais uniformidade na avaliação, em virtude da natureza impessoal do instrumento;
k) Obtém respostas que materialmente seriam impossíveis.

E desvantagens:

a) Percentagem pequena dos questionários que voltam;
b) Grande número de perguntas sem resposta;
c) Não pode ser aplicado a pessoas analfabetas;
d) Impossibilidade de ajudar o informante em questões mal compreendidas;
e) A dificuldade de compreensão, por parte dos informantes, leva a uma uniformidade aparente;
f) Na leitura de todas as perguntas, antes de respondê-las, pode uma questão influenciar a outra;
g) A devolução tardia prejudica o calendário ou sua utilização;
h) O desconhecimento das circunstâncias em que foram preenchidos torna difícil o controlo e a verificação;
i) Nem sempre é o escolhido quem responde ao questionário, invalidando, portanto, as questões;
j) Exige um universo mais homogêneo.

Ao se elaborar deve-se ter cuidado na seleção das questões, pois as respostas às mesmas devem permitir obter informações válidas tendo em conta os objetivos do estudo. Em termos de extensão e de finalidade, o questionário deve ser limitado. Deve ser adequado ao público alvo de tal forma que o cative para responder e dele recolha informação de interesse para o estudo. Deve ter também em conta a possibilidade de tratamento da informação dele obtida. O aspeto material e estético deve ser tido também em conta, nomeadamente o tamanho, a facilidade de manipulação, área suficiente para respostas, disposição e ordem dos itens, entre outros.

Grelhas de observação e entrevistas

Para Marconi e Lakatos (2003, p. 195) a entrevista é um encontro entre duas pessoas, a fim de que uma delas obtenha informações a respeito de determinado assunto, mediante uma conversação de natureza profissional. É um procedimento utilizado na investigação social, para recolha de dados ou para ajudar no diagnóstico ou no tratamento de um problema social. As autoras, citando Selltiz (1965) apresentam seis tipos de objetivos das entrevistas:

- Averiguação de fatos. Descobrir se as pessoas que estão em posse de certas informações são capazes de compreendê-las;
- Determinação das opiniões sobre factos. Conhecer o que as pessoas pensam ou acreditam que os fatos sejam;

- Determinação dos sentimentos. Compreender a conduta de alguém através de seus sentimentos e anseios;
- Descoberta de plano de ação. Descobrir, por meio das definições individuais dadas, qual a conduta adequada em determinadas situaçãoes, a fim de prever qual seria a sua. Aqui há que considerar dois componentes: (1) os padrões éticos do que deveria ter sido feito e (2) considerações práticas do que é possível fazer;
- Conduta atual ou do passado. Inferir que conduta a pessoa terá no futuro, conhecendo a maneira pela qual ela se comportou no passado ou se comporta no presente, em determinadas situações.
- Motivos conscientes para opiniões, sentimentos, sistemas de condutas. Descobrir quais fatores podem influenciar as opiniões, sentimentos e conduta e por quê.

Com base na contribuição de vários autores, as autoras consideram os seguintes tipos de entrevistas:

a) Padronizada ou estruturada. Trata-se da entrevista em que o entrevistador segue um roteiro previamente estabelecido. As perguntas feitas ao indivídiuo são predeterminadas. Realiza-se de acordo com um formulário elaborado e é efetuada preferencialmente com um grupo de pessoas selecionadas de acordo com um plano. Com a padronização procura-se tornar as respostas comparáveis. O pesquisador não pode adaptar as perguntas, não pode fazer outras perguntas, nem alterar a ordem dos tópicos;

b) Despadronizada ou não estruturada. Neste tipo de entrevista o entrevistador tem a liberdade de desenvolver cada situação em qualquer direção conforme julgar melhor. As perguntas são abertas, podendo ser respondidas dentro de uma conversa informal. A entrevista não estruturada pode ser focalizada, clínica ou não dirigida.

   Entrevista focalizada: nela há um roteiro de tópicos relativos ao problema que se vai estudar, tendo o entrevistador a liberdade de fazer as perguntas que quiser e conforme melhor entender fazer. Com esta liberdade, o entrevistador tem a oportunidade de sondar razões e motivos, bem como dar esclarecimentos prévios e posteriores às respostas.

   Entrevista clínica: visa estudar os motivos, os sentimentos e a conduta das pessoas. Uma série de perguntas específicas podem ser organizadas para este tipo de entrevista.

   Entrevista não dirigida: o entrevistado tem liberdade total, podendo expressar suas opiniões e seus sentimentos. O entrevistador passa a ter o papel de incentivador, fazendo com que o entrevistado fale sobre determinado assunto, sem precisar de forçá-lo a responder.

c) Painel. Visando estudar a evolução das opiniões, consiste em repetir perguntas, com intervalos de tempo, às mesmas pessoas. As perguntas devem ser formuladas de maneira diversificada.

Vantagens e desvantagens da entrevista

Vantagens:

- Pode ser utilizada com todos os segmentos da população: analfabetos ou alfabetizados;
- Fornece uma amostragem muito melhor da população geral: o entrevistado não precisa de saber ler ou escrever.
- Há maior flexibilidade, podendo o entrevistador repetir ou esclarecer perguntas, formular de maneira diferente, fazer esclarecimentos, garantindo, assim, a compreensão;
- Oferece maior oportunidade para avaliar atitudes, condutas, podendo o entrevistado ser observado naquilo que diz e como diz: registo de reações, gestos, etc;
- Dá oportunidade para a obtenção de dados que não se encontram em fontes documentais e que sejam relevantes e significativos;
- Há possibilidade de se conseguir informações mais precisas, podendo ser comprovadas, de imediato, as discordâncias;
- Permite que os dados sejam quantificados e submetidos a tratamento estatístico.

Desvantagens:

- Dificuldade de expressão e comunicação de ambas as partes;
- Impreensão, por parte do informante, do significado das perguntas, da pesquisa, que pode levar a uma falsa interpretação;
- Possibilidade de o entrevistado ser influenciado, consciente ou inconscientemente, pelo questionador, pelo seu aspecto físico, suas atitudes, ideias, opiniões, etc.;
- Disposição do entrevistado em dar as informações necessárias;
- Retenção de alguns dados importantes, receando que a sua identidade seja revelada;
- Pequeno grau de controlo sobre a situação de recolha de dados;
- Ocupa muito tempo e é difícil de ser realizada.

A superação ou minimização das desvantagens depende em grande parte da experiência do investigador.

Embora tenham decorridos outros diálogos informais, consideramos um total de duas entrevistas. As mesmas tiveram como objetivo averiguar factos resultantes de análises previamente feitas a respostas a questionários. Deste modo, revelou-se mais adequado o tipo de entrevista despadronizada ou não estruturada, dando liberdade aos entrevistados de falar sobre determinado assunto. O entrevistador foi incentivando e direcionando os entrevistados a se debruçar sobre os aspetos em que mais carecia de informação e, deste modo, foi consolidando ou descartando informações previamente recolhidas.

2.2.4.1 Questionário de caraterização dos alunos

Enquanto investigadores tomámos contacto com alunos até então desconhecidos. Era necessário selecionar com algum critério aqueles que garantissem mais qualidade à nossa investigação, aqueles que sofressem menos influência de fatores alheios à sua aprendizagem, aqueles que, por assim dizer, estivessem a desenvolver a sua aprendizagem num ambiente de normalidade. Nesta conformidade, submetemos todos os alunos do primeiro ano do curso de Contabilidade e Gestão, períodos regular e pós-laboral, ao presente instrumento de recolha de dados. Com este instrumento procurámos fazer uma caraterização genérica dos alunos, servindo de base para a seleção dos que passariam para as etapas seguintes da investigação.

Este instrumento foi aplicado nos primeiros dias de contacto com os alunos, foi de grande valor, pois, com a entrevista de caraterização dos alunos (Apêndice 2), permitiu selecionar a amostra com que se trabalhou ao longo do estudo. Dos cursos identificados a nível secundário, o de Ciências Físicas e Biológicas é dos que curricularmente apresenta melhor nível de preparação para o Cálculo, além disso, entre os seus formados encontrámos um maior número de alunos que ingressaram no Ensino Superior sem interromperem os seus estudos e um maior número de alunos que estuda e não trabalha. Deste modo, os 10 alunos aos quais se aplicou o questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3) foram selecionados do curso de Ciências Físicas e Biológicas.

O questionário (Apêndice 1) é composto por 14 questões. A primeira, “1. Curso que frequentou:”, é uma de escolha única — salvo em casos em que o aluno tivesse frequentado dois ou mais cursos secundários que tornaria a questão de múltipla escolha, o que não se verificou nesta investigação — com 10 opções, sendo a décima aberta para o caso de nenhuma das 9 anteriores corresponderem à resposta do aluno. Sabendo do curso frequentado no Ensino Secundário facilmente nos apercebemos dos conteúdos de Matemática possivelmente abordados pelos alunos, o que, claramente, facilita a identificação dos conteúdos que os alunos deverão dominar. Os dados aqui já são recolhidos de maneira categorizados pela área de formação dos alunos. Não sendo ordenáveis nem sendo possível realizar qualquer operação aritmética sobre os mesmos, encontram-se no nível de medida nominal.

Sabemos da influência que tem o tempo que um aluno fica sem frequentar as aulas na perda e ou na inconsistência dos seus conhecimentos e das suas habilidades. Assim, a segunda questão, “2. Quantos anos letivos ficou sem estudar Matemática antes de ingressar no Ensino Superior?”, permitiu-nos ter um quadro do tempo sem prática na aprendizagem da Matemática de todos os alunos das turmas do primeiro ano do curso de Contabilidade e Gestão nos dois períodos, regular e pós-laboral. Com esta informação foi possível identificar os alunos que, em função do tempo de paragem dos seus estudos, perderam menos conhecimentos ou tiveram-nos menos consistentes, o que contribuiu bastante na seleção da amostra.

Nas questões três, quatro e cinco — “3. Em média, durante quantas horas estuda em casa por dia?”, “4. Em que consiste a sua metodologia de aprendizagem?” e “5. Qual é a bibliografia (livros, vídeos, sítios da Internet, etc.) de apoio à cadeira que utiliza?” — procurámos entender a maneira como os alunos organizam e desenvolvem a sua aprendizagem dentro e fora da sala de aula. Procurámos buscar que percepção os mesmos têm sobre o processo de aprendizagem, o que consideravam essencial, o que consideravam acessório, o que consideravam importante, o que consideravam sem importância, o que consideravam necessário, o que consideravam desnecessário, o que consideravam urgente, o que consideravam secundário, como concebiam a sua hierarquia de prioridades, entre outros aspetos.

As três questões, que também foram abordadas e aprofundadas na entrevista de caraterização dos alunos, permitiram confrontar as concepções dos alunos com aquilo que se encontra previsto no programa da unidade curricular, bem como no plano curricular do curso. Mais precisamente, permitiu confrontar o peso que a unidade curricular tem em termos de tempo no currículo com o tempo dedicado pelos alunos ao seu estudo. Permitiu confrontar a metodologia de ensino e de aprendizagem com a metodologia considerada e desenvolvida pelos alunos. Permitiu confrontar a bibliografia prevista no programa da disciplina com a bibliografia considerada e utilizada pelos alunos nos seus processos de aprendizagem.

As confrontações despertaram nos alunos pormenores que eles descoravam nos seus processos de aprendizagem e, consequentemente, remeteu-os a introspeções que tiveram influência nos seus relacionamentos intrapessoal e interpessoal, tiveram influência na capacidade de distinguir duas formas de encarar a aprendizagem — como um ato ou um conjunto de atos isolados e como um processo — tiveram influência na forma como passaram a conceber e desenvolver os seus processos de aprendizagem e, consequentemente, na capacidade de construção e absorção de conceitos matemáticos.

Na sexta questão, “6. Que conhecimento dos seguintes temas, numa escala de 1 a 5, tem para a frequência do curso? …”, procurámos saber que consciência os alunos tinham da sua estrutura mental no que o conhecimento sobre funções, derivação e integração diz respeito. É um exercício inicial e individual de reflexão sobre o grau de conhecimento dos conceitos em estudo cujas respostas foram consolidadas e enriquecidas ao longo da aplicação de outros instrumentos de coleta de dados. A escala disponível para a resposta, a de Likert, permitiu-nos obter uma autoavaliação dos alunos em 1, 2, 3, 4 e 5, respetivamente, mau, medíocre, suficiente, bom e muito bom. As respostas permitiram ter uma noção inicial do nível de partida dos alunos.

Na sétima questão, “7. Que importância a matemática tem para si?”, procurámos buscar a opinião pessoal dos alunos, procurámos que, longe da obrigatoriedade de cumprir com uma grelha curricular, de cumprir um programa de estudos, de cumprir um horário, os alunos nos apresentassem a importância que atribuem à Matemática. Do ponto de vista pessoal, permitiu-nos saber, dentro de uma escala que vai de aversão a um grande gosto, até que ponto os alunos gostavam da Matemática. As respostas também contribuíram para a seleção dos 10 alunos com os quais se trabalhou com mais profundidade.

Com a oitava questão, “8. Que importância tem a Matemática para o seu curso?”, procurámos identificar como os alunos veem a inclusão da unidade curricular “Matemática I” no plano curricular do curso de Contabilidade e Gestão, se é de facto uma necessidade ou se é um estorvo. Não se esperava aqui uma resposta bastante elaborada da parte dos alunos, mas sim até que ponto os mesmos reconheciam a necessidade da unidade curricular no seu curso. As inclinações das respostas dos alunos revelaram o potencial nível de interesse destes na aprendizagem da unidade curricular e, desta maneira, contribuiu para a escolha dos 10 alunos com os quais se aprofundou a investigação.

Nas questões 9, 10 e 11 — “9. Trabalha? …”, “10. Em quê que trabalha?” e “11. Que importância tem a Matemática para o seu trabalho?” — quisemos averiguar a influência de outras ocupações na organização e desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, bem como a utilidade, direta ou indireta, dos conteúdos de Matemática I no desenvolvimento das suas atividades.

Na questão 12, “12. De 0 a 10 escolha um número que melhor represente o seu gosto pela Matemática…”, retomamos, de alguma forma, a questão sete. Isto foi propositado no sentido de consolidar as respostas dadas à questão 7.

Com a questão 13, “13. Em que proporção (em percentagem) os seguintes fatores influenciam o seu aproveitamento em Matemática? …”, depois das várias questões colocadas, julgámos que fosse uma oportunidade de os alunos apresentarem de forma sintética e agregada as respostas que foram dadas anteriormente. Foi uma oportunidade de os alunos apresentarem a posição relativa de cada um dos fatores considerados como influentes no seu processo de aprendizagem.

Na questão 14, “14. Se tem a perceção de que ficou algo por dizer, tenha a bondade de servir-se das linhas seguintes para descrever:”, pretendemos explorar dos alunos informações que estes julgassem úteis, mas que nos tivessem escapado.

2.2.4.2 Guião da entrevista de caraterização dos alunos

Pretendemos obter dados e informações mais pormenorizados da caraterização genérica dos alunos, obtivemos os seus pontos de vista sobre as suas práticas. Pretendemos também verificar informações recolhidas tanto pelas observações como pela aplicação dos questionários. O grupo alvo foi o de 20 alunos pré-selecionados por via das observações feitas e dos questionários aplicados.

Tratou-se de entrevistas semiestruturadas, atendendo à necessidade que houve de se comparar os dados e informações recolhidos dos diferentes alunos. À partida era estruturada, pois teve como guião o questionário anteriormente aplicado, por outro lado, tornou-se semi-estruturada devido à necessidade que o investigador tinha de apresentar as mesmas questões de maneira diferente ou de aprofundá-las para melhor apurar a informação obtida.

Esta entrevista (Apêndice 2), feita individualmente a 20 alunos, foi feita cerca de uma semana depois de se aplicar o questionário de caraterização dos alunos, instrumento que serviu de base. O mesmo permitiu selecionar os 10 alunos com os quais se deu sequência ao estudo. Com as entrevistas procurou-se:

- Esclarecer dúvidas das respostas ao questionário;
- Dar consistência às respostas;
- Validar as respostas, aproximar o declarado à realidade;
- Conformar algumas expressões aparentemente desenquadradas;
- Conhecer melhor os alunos pré-selecionados;
- Proporcionar condições para a seleção da amostra criterial.

2.2.4.3 Questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos

Retomemos o conceito apresentado por Piaget. Segundo Piaget (1974) estruturas cognitivas são padrões de ação física e mental subjacentes a atos específicos de inteligência e correspondem a estágios do desenvolvimento infantil. Para efeitos desta tese, consideramos a estrutura cognitiva para além dos estágios de desenvolvimento infantil, atendendo que para além desta etapa da vida há aprendizagem e, consequentemente, construção e reconstrução de conceitos.

Pretendemos fazer uma caraterização da estrutura cognitiva dos alunos. Na verdade, trata-se da compilação de exercícios e problemas de diagnóstico dados aos alunos na introdução de três conceitos: função, derivação e integração. Os exercícios e problemas selecionados e reunidos no questionário proporcionam-nos bases sobre as estruturas e mecanismos mentais dos alunos. Os três conceitos serviram de base para dividir o questionário em três partes correspondentes a cada um deles. Graças aos dados e informações recolhidas tanto no questionário como na entrevista de caraterização dos alunos, aqui já trabalhámos com um grupo mais reduzido de alunos, trabalhámos com 10 deles.

Para garantir a fiabilidade dos dados recolhidos com a aplicação do questionário, o mesmo foi corrigido pelo investigador e submetido à apreciação de mais dois professores de Análise Matemática. Para garantir a validade dos resultados obtidos, as análises feitas pelo investigador foram submetidas à apreciação de mais dois professores de Análise Matemática. O questionário abrangeu todos os tópicos necessários para a frequência da unidade curricular Matemática I, com graus de dificuldade variados, do simples ao complexo, garantindo assim a sensibilidade do instrumento, ou seja, a possibilidade que o mesmo teve de revelar diferenças nas aptidões dos alunos. O questionário foi claro e aplicado num tempo razoável para a usabilidade do mesmo.

Segundo Coutinho (2014), índice de dificuldade é a proporção de sujeitos que respondem corretamente a um item e calcula-se dividindo o número de respostas corretas pelo número total de sujeitos avaliados, dando uma relação inversa, isto é, quanto maior o valor do índice de dificuldade mais fácil é a questão. Os resultados possíveis situam-se no intervalo fechado de 0 a 1, onde 0 significa que ninguém responde corretamente e 1 significa que todos respondem corretamente. O valor de 0,5 é o que maior dispersão das respostas indica.

Em todos os tópicos tivemos questões muito fáceis, de que se espera um índice de dificuldade baixo, questões medianas, das quais se espera um índice de dificuldade equilibrado, e questões muito difíceis, das quais se espera um índice de dificuldade alto.

O questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3) foi aplicado cerca de uma semana depois de se fazer a entrevista de caraterização dos alunos.

Na primeira parte do questionário, Funções, começámos por perguntar aos alunos o que entendiam por função, onde os alunos tiveram a oportunidade de apresentar todo o entendimento que tinham sobre função sem, no entanto, proceder uma consulta, mas sim usando palavras suas. É o seu entendimento que pedimos e não uma reprodução de uma definição, o que, apesar de ideal, não seria algo necessariamente vindo deles.

Na segunda e terceira questões procurámos, a nível operacional, o entendimento dos alunos sobre função. Depois de recolher deles o conceito, quisemos vê-lo revelado na prática. Ambas questões permitiram começar a entender as estruturas mentais dos alunos, bem como começar a compreender como tais estruturas evoluíam de uma para outra.

Nas questões quatro, cinco e seis procurámos, a nível de objeto, o entendimento dos alunos sobre função. Um dos segmentos do estudo de funções que mais revela e tem sido utilizado para revelar tal entendimento é a composição de funções. Assim, nas três questões em análise procurámos, de perspetivas diferentes — analítica, gráfica e tabular —, explorar o entendimento dos alunos sobre a composição de funções.

Nas questões de sete a 10 procurámos gradualmente a vários níveis — de ação, de processo e de objeto — o entendimento dos alunos sobre derivação, resolução de exercícios, de problemas e sua aplicação. Deste modo, as questões foram apresentadas de perspetivas diferentes e com vários graus de dificuldade.

Nas questões de 11 a 13 procurámos, com um grau de dificuldade crescente, pelo entendimento dos alunos em questões que se prendem com a integração de funções, resolução de exercícios, de problemas e sua aplicação.

Os instrumentos Avaliação do Conceito de Cálculo (ACP) e Prontidão do Conceito de Cálculo (PCC) não foram adotados como tal neste estudo. Atendendo à flexibilidade prevista pelos seus autores, fez-se uma combinação dos mesmos com outros fatores, nomeadamente o currículo (programa) da unidade curricular Matemática I, a necessidade de se obter respostas que melhor permitam estudar o desempenho dos alunos, bem como a atividade da professora no que diz respeito ao diagnóstico do nível dos seus alunos. Como resultado, o questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3) tem menos questões do que as previstas no PCC e tem questões abertas, permitindo maior e melhor descrição do desempenho dos alunos.

2.2.4.4 Guião da entrevista de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos

Quizemos obter dados e informações mais pormenorizados sobre a estrutura cognitiva dos alunos. Os mesmos tiveram a oportunidade de pronunciar-se sobre o seu desempenho na resposta ao questionário sobre a sua estrutura cognitiva. Pudemos também verificar as informações recolhidas a partir de outras fontes, nomeadamente a partir de observações e a partir do questionário sobre a estrutura cognitiva dos alunos. O grupo alvo foi o de 10 alunos pré-selecionados por via das observações feitas e dos questionários aplicados.

Tratou-se de entrevistas não estruturadas, atendendo à necessidade que houve de se comparar os dados e informações recolhidos dos diferentes alunos. Assim foi por permitir um maior à vontade ao entrevistador em lidar com as questões que foram surgindo ao longo da entrevista, permitiu, no momento da entrevista, dar profundidade a aspetos que foram surgindo. A entrevista teve como referência na sua condução o questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos. O entrevistador apresentou não sequencialmente e, em função das necessidades, algumas questões sob várias maneiras aos alunos.

Esta entrevista (Apêndice 5), feita individualmente a 10 alunos, foi feita cerca de uma semana depois de se aplicar o questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos, instrumento que serviu de base. O mesmo permitiu entender melhor o porquê do desempenho dos alunos no questionário. Esclareceu-se dúvidas das respostas ao questionário, deu-se consistência às respostas dadas pelos alunos, verificou-se e consolidou-se respostas, pôde-se perceber melhor o que se quis dizer com algumas respostas e conheceu-se melhor os alunos pré-selecionados. Para além da entrevista, o diálogo com os alunos continuou nas semanas seguintes sempre que se julgou necessário.

2.2.4.5 Grelha de observações feitas ao longo de aulas

Este instrumento (Apêndice 6) permitiu-nos observar as competências que os alunos adquiriram ao longo das aulas. Permitiu-nos acompanhar in loco o desenvolvimento das atividades e, consequentemente, fazer descrições da mesma. Permitiu-nos acompanhar o encontro das expetativas dos alunos com a realidade nas abordagens dos conteúdos matemáticos.

Quanto às notas de campo registadas na grelha de observação, trata-se de um instrumento para a tomada de notas descritivas, bem como reflexivas. As primeiras têm a ver com descrições bastante precisas e minuciosas do ambiente envolvente, da aparência física dos participantes, suas expressões faciais, expressões verbais, enfim, suas posturas. Trata-se de redução a texto de todo o cenário de interesse para o estudo sem interpretação do observador. As segundas notas, as reflexivas, são aquelas tomadas através da interpretação do observador. Envolvem, portanto, expressões de sentimento, interpretações, ideias, perceções, entendimentos, compreensões e conclusões que o observador vai formando ao longo da sua observação. Apesar de ser um exercício difícil, procurámos, na utilização deste instrumento, distinguir os dados e informações com reflexão e análise do investigador.

No que diz respeito ao observador, importa também referir que das duas modalidades de interação com os participantes — observador participante e observador não participante —, optámos pela de observador participante. Nestas circunstâncias, desde o primeiro momento os alunos são informados que estão sob observação e o que se pretende, o que, à partida, pode alterar o seu comportamento, mas, depois de algum tempo e depois de se mostrar na prática o que se pretende, consegue-se que os alunos retomem o seu comportamento natural.

As anotações, tanto descritivas como reflexivas, foram feitas ao longo de todas as aulas observadas. Como se pode facilmente imaginar, não é possível numa só aula observar as diversas perspetivas em consideração. Assim, importa dizer que tivemos que nos fazer acompanhar de um caderno de observações — conjunto de grelhas de observação — que nos permitiu ir compondo as diversas perspetivas de observação de cada ente observado. Procurámos, tanto quanto pudemos, tomar as notas de maneira discreta sem deixar transparecer para os alunos que eram reações ao que observávamos. Procurámos não estar aparentemente sincronizados com as suas expressões, fossem elas de qualquer tipo, fossem elas de qualquer grau de itensidade. Sobre a discrição do observador, importa também referir que, salvo raras exceções alheias à sua vontade, foi sempre o primeiro a se fazer presente na sala de aula e dos últimos a abandoná-la.

Este foi um instrumento de recolha de dados de uso permanente.

2.2.5 Etapas da investigação

Revisão de literatura

A revisão de literatura foi feita sob as seguintes vertentes:

- Teorias de investigação em Educação Matemática;
- Antecedentes do tema;

- Metodologia de investigação científica;
- Contexto no qual se desenvolveu o estudo.

Elaboração de instrumentos (questionários, guiões de entrevista e grelhas de observação)

Aplicação de instrumentos

Redação do relatório

A redação da presente tese foi feita ao longo do período de tempo que vai de 2013 a 2017. Foi feita ao longo destes cinco anos civis com início, noutros termos, no segundo semestre do primeiro ano (2012/2013) de frequência do curso de doutoramento em Didática da Matemática e fim no segundo semestre do quinto ano (2016/2017) de frequência do mesmo curso. É um processo que antecedeu o trabalho de campo de investigação e sucedeu o mesmo trabalho.

Ao longo da redação desta tese, procurámos em cada palavra, cada frase e cada parágrafo alcançar os objetivos específicos adotados na investigação. Para tal, procurámos factos prévios à nossa investigação, apresentámo-los, através do tratamento de dados feito confirmámo-los, acrescentámos as nossas contatações, criando desta forma factos mais sólidos e bases para novas investigações.

Revisão crítica do relatório

É um processo que foi desenvolvido à medida que se foi redigindo a tese, tendo consistido na recolha de contributos do orientador, do coorientador, de pares, da professora e dos alunos envolvidos na investigação. É um processo de grande importância e indispensável para trabalhos de investigação. O investigador principal sozinho não consegue dar conta de tudo, por mais que se dedique, muito lhe escapa, por mais tempo que tenha, não lhe é suficiente para levar a cabo a investigação com a qualidade que se exige. É-lhe importante olhar através de outros olhos, sair de si e encarnar a perspetiva de outros, submeter as suas ideias a outros crivos para além do seu, partilhar as suas iniciativas, os seus desenvolvimentos, bem como as suas conclusões. São exercícios que lhe permitem ganhar tempo, enriquecer as suas ideias em quantidade e qualidade, bem como proporcionam validação dos métodos aplicados na investigação e das conclusões obtidas na mesma.

Em relação ao orientador e ao coorientador, coube-lhes a todo o momento indicar o caminho a seguir, indicar as ferramentas a utilizar, bem como a participação na gestão do tempo disponível para a execução da investigação nas suas diferentes etapas.

Aos pares, enquanto percursosres de caminhos semelhantes, coube a tarefa de intercambiar experiências, particularmente as comuns aos percursos. Coube-lhes a tarefa de participar em discussões de iniciativas, de ideias, de procedimentos de técnicas, de conceitos, de pontos de vista, etc. permitindo, deste modo, refinar um conjunto de informações antes de serem exposta a outros grupos. A revisão dos pares revestiu-se de grande valia, pois permitiu produzir informação bem mais elaborada. No que toca aos instrumentos de recolha de dados, por exemplo, permitiu de antemão saber melhor que informação procurar, onde procurá-la, como procurá-la, de quem procurá-la, bem como porquê da sua procura. No que diz respeito à revisão de literatura, facilmente entende-se que, devido a limitações humanas, não nos é possível consultar todos os materiais necessários para uma investigação deste calibre de maneira isolada, e é aí que, mais uma vez, se revelou importante o papel dos pares. Muitos conceitos foram-nos trazidos em primeira mão por eles, proporcionando-nos claramente um considerável ganho de tempo, um considerável conhecimento de outras realidades que permitiu mais facilmente enquadrar a nossa.

A revisão crítica do relatório passou também por apresentar resultados da tese à professora e aos alunos sobre os quais incidiu a investigação. Esta técnica, também conhecida como devolução de resultados, permitiu obter a reação dos investigados sobre tudo quanto se descreveu a seu respeito, permitiu-lhes, também, consolidar a confiança de que a investigação é de caráter sigiloso. Com a reação à devolução dos resultados, consolida-se a validação dos mesmos. A reação dos investigados permitiu ajustar algumas leituras feitas por nós, permitiu-nos conhecer alguns detalhes não notados antes, permitiu perceber um pouco mais das estruturas e dos mecanismos mentais dos alunos. Permitiu envolvê-los mais, torná-los mais partícipes, assim como mais conscientes de si mesmos no que a aprendizagem da Matemática diz respeito.

2.3 Considerações sobre o contexto no qual se desenvolveu a investigação

Este estudo foi feito na Escola Superior Politécnica do Namibe, unidade orgânica da Universidade Mandume Ya Ndemufayo, localizada na cidade de Moçâmedes, província do Namibe, em Angola. A mesma instituição foi criada à luz do Decreto Presidencial 236/11 de 29 de agosto que aprova o Estatuto Orgânico da Universidade Mandume Ya Ndemufayo. Mais precisamente, o estudo foi feito na unidade curricular Matemática I do primeiro ano do curso de Contabilidade e Gestão.

O curso de Contabilidade e Gestão com uma duração de cinco anos, sendo quatro lectivos e um de elaboração e defesa de um trabalho de fim de curso, é um curso que tem como principais perfis de saída o de técnico de contas e o de gerente. Claro está que o curso não visa formar matemáticos nem professores de Matemática.

2.3.1 Processos de ensino e de aprendizagem na sala de aula

A unidade curricular sobre a qual incidiu o estudo é denominada Matemática I, é lecionada com uma carga horária de seis tempos semanais, em dois tipos de aula teórico-prática e prática. Os seis tempos são distribuídos em três períodos de tempos duplos. Na altura em que se recolheu os dados das aulas, os períodos de dois tempos estavam em três dias da semana, segundas, quartas e sextas-feiras, a partir do primeiro, terceiro e primeiro tempos, respetivamente.

A unidade curricular é lecionada ao longo do primeiro semestre do primeiro ano, durante 15 semanas. Ora, 15 semanas e seis tempos semanais perfazem um total de 90 tempos semestrais. Cada tempo tem a duração de 45 minutos, o que perfaz um total de 67 horas e 30 minutos de aula. No curso de Contabilidade e Gestão, os alunos têm uma carga horária de seis tempos por dia durante os cinco dias úteis da semana, de segunda a sexta-feira, perfazendo assim 30 tempos semanais e 450 tempos semestrais. Os 90 tempos semestrais de Matemática I representam 20% da carga horária total do primeiro semestre.

O programa de Matemática I (0) comporta cinco unidades, nomeadamente (1) Sucessões, (2) Limite de uma Função Real de Variável Real, (3) Funções Contínuas e Descontínuas em $\mathbb{R}$, (4) Derivadas e (5) Primitivas. As aulas, tanto de um tipo como do outro, são lecionadas por uma única professora. Esta unidade curricular tem como objeto de estudo funções reais de variável real de uma só variável. Devido a limitações de tempo e por não ser um curso de especialização em Matemática, a unidade curricular não é lecionada com a mesma profundidade que se leciona Análise Matemática I nos cursos superiores de Matemática ou de Ensino da Matemática. A lecionação de Matemática I contém caraterísticas tanto daquilo que Tall (1992) descreve como Cálculo Informal como daquilo que descreve como Análise Formal, predominando caraterísticas do Cálculo Informal. Matemática I é precedência de Matemática II, onde o objeto de estudo também são funções reais de variável real, mas com a diferença de serem funções de duas ou mais variáveis.

As aulas teórico-práticas eram caraterizadas por uma predominância da exposição da professora. Ao longo delas a professora apresentava o objetivo da aula, os conceitos a serem estudados, a relevância dos mesmos e abordava-os com competência. Os alunos eram permanentemente envolvidos nas abordagens da professora com convites frequentes para darem o seu contributo nos conceitos construídos, nas definições apresentadas, nos exemplos apresentados, bem como nos exercícios normalmente apresentados e resolvidos na parte final da aula. As fases didáticas eram normalmente respeitadas e a transição entre elas feita de maneira suave. As aulas práticas eram caraterizadas por uma maior participação dos alunos com a professora mais a exercer o papel de reguladora das atividades na sala de aula do que propriamente de uma protagonista da atividade.

No contexto em que o estudo foi desenvolvido é usual considerar-se as seguintes fases didáticas: (1) asseguramento do nível de partida; (2) motivação; (3) orientação até o objetivo; (4) desenvolvimento; (5) consolidação. A professora desenvolvia todas as fases. Na primeira, revia os conhecimentos prévios necessários para a lecionação de novos conteúdos, procurava pôr todos os alunos ao mesmo nível, incidindo as suas explicações sobre o que eles não dominavam, bem como sobre a correção de tarefas. Na segunda fase, procurava despertar nos alunos interesse pelos conteúdos que a seguir lecionaria, falava-lhes sobre a sua importância na Matemática, no seu curso e noutras áreas em que poderia ser aplicado. Na terceira fase, a professora procurava apresentar os objetivos geral e específicos da aula, explicava aos alunos como os alcançariam e o que precisavam para os alcançar, delimitava o campo e o tempo de ação, enfim, situava os alunos. Na quarta fase, expunha os novos conceitos, procurando ligá-los aos conhecimentos prévios, exemplificava, esclarecia dúvidas, estimulava os alunos a desconstruir conceitos errados, a reconstruir conceitos de maneira correta e construir novos conceitos. Na quinta fase, verificava até que ponto os alunos tinham assimilado o que era lecionado. Submetia-os à resolução de exercícios apresentados sob diversas formas e com distintos graus de dificuldade. É uma fase que normalmente terminava deixando exercícios, os restantes ou novos, como tarefa. É uma fase em que a professora estimulava tanto o trabalho individual como o coletivo. Pelo trabalho individual os alunos tinham a oportunidade de fazer um autoexame, identificar suas debilidades e superá-las. Tinham a oportunidade de consolidar tudo quanto tinham aprendido ao longo da aula. Pelo trabalho coletivo os alunos tinham a oportunidade de encarar os conceitos sob pontos de vista alheios aos seus, sob os pontos de vista dos seus colegas, tinham a oportunidade de trocar experiências e, assim, expandir e consolidar o seu entendimento.

A exposição dos conteúdos pela professora assentava em quatro perspetivas: (1) apresentação algébrica; (2) apresentação gráfica dos conceitos; (3) apresentação numérica; (4) descrição verbal ou escrita de conceitos e de procedimentos. A perspetiva algébrica era a predominante, seguida pela gráfica e pelas outras duas. A professora projetava os conteúdos das aulas numa tela, utilizando um vídeo projetor. Algumas vezes, quando fosse necessário, completava os conteúdos projetados fazendo ditados. Quanto aos exemplos e aos exercícios, a professora projetava os enunciados na tela e fazia as suas resoluções no quadro. Os alunos transcreviam os apontamentos projetados na tela e os exemplos e os exercícios resolvidos no quadro para os seus cadernos.

Quanto ao ambiente físico da sala de aula em que foi lecionada a unidade curricular, importa referir que as carteiras dos alunos estavam dispostas em filas individuais, que a secretária da professora estava defronte às carteiras dos alunos, entre estes e o quadro, ligeiramente afastada para o lado direito da professora. A sala era devidamente iluminada e arejada.

No que toca às relações interpessoais e intrapessoais, o ambiente, nos momentos de exposição da professora, era sereno e de grande reflexão. Pela linguagem gestual — alguns olhares para o alto, olhares distantes, manifestações serenas de satisfação ("ahn!…", "OK!", "Estou a ver…", "então… é por isso!", entre outras), etc. — parecia que alguns alunos estavam a buscar em si ligações com os conteúdos apresentados pela professora. À medida que a professora expunha, alguns alunos aparentavam viver momentos de inquietação interior, pareciam tentar exteriorizar alguma ideia, reforçar, diminuir ou acrescentar alguma coisa ao discurso da professora. Com alguma frequência as procuras e as inquietações pareciam ser bem-sucedidas, pois eram seguidas de momentos de aparente alívio. Por outro lado, também pela linguagem gestual — espanto serenamente manifestado, constante perda e procura do fio condutor à compreensão, olhares manifestando estranheza, esgares, etc. —, parecia que alguns alunos estavam a ser confrontados com um choque térmico, momentos em que, por mais esforços que fizessem, pouco ou nada tinha ligação com o que já traziam na sua estrutura mental, embora devesse ter. Reconhecer que fazer parte daquela turma implicava encontrar ligações entre as suas estruturas mentais e os novos conteúdos e não conseguir estabelecê-las provocava nalguns deles alguma frustração, sentimento manifestado por suaves suspiros, quase impercetíveis, manifestado ainda por desvios da atividade principal que era a de participação na aula. Por outro lado, ainda, havia os alunos indiferentes, pouco expressivos dos seus sentimentos, de uma linguagem gestual, digamos assim, pobre, de difícil leitura. Alunos que pareciam ter simplesmente depositado o seu corpo na sala de aula para cumprir formalismos.

Ainda sobre as relações interpessoais e intrapessoais, havia também os momentos de maior interação, eram os de apresentação de exemplos, bem como os de resolução de exercícios. Momentos em que os indiferentes eram puxados pelos mais participativos e os que pouco ou nada pareciam entender eram aclarados pelos mais esclarecidos. Eram momentos de barulhos localizados e bastante profícuos, não generalizados, provocados pelas trocas de impressões entre os vizinhos de carteira. Eram momentos de nivelamento dos conteúdos captados, nivelamento dos conhecimentos construídos, eram momentos de ajustes e de reajustes, eram momentos de reagrupamento para partir para os desafios seguintes.

As aulas práticas eram marcadas por um ambiente de muito maior interação. Começavam geralmente com a resolução dos exercícios e problemas da aula anterior, apresentação de novos exercícios e problemas, tempo de reflexão e resolução independente dos alunos, tempo de resolução em comum moderado pela professora e indicação de novos exercícios e problemas para resolução independente em casa.

A professora promovia e garantia um ambiente de relações interpessoais de amizade e de respeito, o que facilitava em grande medida a participação dos alunos. Pode-se dizer que, dentro dos devidos limites, os alunos estavam à vontade. A professora promovia e garantia um ambiente de relação intrapessoal reflexiva e introspetiva, o que favorecia a ocorrência de mecanismos mentais, dando lugar às consequentes alterações das estruturas mentais dos alunos.

Do ponto de vista da estruturação da aula, a promoção e a garantia de condições adequadas de aprendizagem pela professora consistia na passagem pelas seguintes fases didáticas: asseguramento do nível de partida, motivação, orientação até o objetivo, desenvolvimento e consolidação.

Tabela 12: Descrição das 12 (24 tempos) aulas de Matemática I observadas (sombreadas na tabela) no curso de Contabilidade e Gestão

Temp	Conteúdo (aula)	Desenvolvimento
1 2	Noções topológicas em $\mathbb{R}$	Vizinhança, interior, exterior, fronteira, aderência e derivado de um conjunto. Conjuntos abertos e conjuntos fechados. Conjuntos limitados.
3 4	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas
5 6	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas
7 8	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas
9 10	Sucessões de números reais	Definição de uma sucessão. Limite de uma sucessão. Critérios de convergência.
11 12	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas
13 14	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
15 16	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas
17 18	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
19 20	Generalidades sobre funções reais de variável real	Definição. Tipos de função. Representação de funções. Resolução de exercícios.
21	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas
22	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas
23 24	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas
25 26	Limites	Limites fundamentais. Tipos de indeterminações.
27	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas

28		
29 30	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas
31 32	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas
33 34	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
35 36	Continuidade de funções	Continuidade de funções. Tipos de descontinuidade. Resolução de exercícios e de problemas.
37 38	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas
39 40	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
41 42	Derivada de uma função	Derivada por definição. Interpretação geométrica. Interpretação económica. Interpretação física. Reta tangente. Resolução de exercícios.
43 44	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
45 46	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
47 48	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
49 50	Derivada de uma função	Derivação por tabela. Regras e fórmulas de derivação.
51 52	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
53 54	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
55 56	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
57 58	Derivada de uma função	Regra da cadeia. Derivadas de ordem superior.
59 60	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
61 62	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
63 64	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
65 66	Derivada de uma função	Derivada de função implícita. Derivada de função paramétrica.
67 68	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
69 70	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
71 72	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
73 74	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
75 76	Estudo de uma função	Domínio. Imagem. Paridade. Extremos. Concavidade e convexidade. Pontos de inflexão.

77 78	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
79 80	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.
81 82	Aula prática	Resolução de exercícios e de problemas.

No que diz respeito a meios de ensino, os alunos utilizavam cadernos, esferográficas, lápis, meios geométricos (réguas, esquadros, transferidores e compassos), utilizavam máquinas de calcular científicas, não utilizavam recursos tecnológicos mais avançados como os softwares Derive, Maple, Mathematica, Texas Instruments, entre outros. A professora utilizava quadro, marcadores, videoprojetor e os seus apontamentos.

Utilizando critérios de Bada (2015, pp. 68, 69) como referência, consideramos a sala de aula como construtivista. A Tabela 13 associa critérios de Bada a justificações da sala de aula investigada.

Tabela 13: Sala de aula construtivista

Sala de aula construtivista	Constatações na sala de aula
O curriculum enfatiza grandes conceitos, começando com o todo e expandindo para incluir as partes	Ao longo das aulas a professora apresentava o objetivo da aula, os conceitos a serem estudados e a sua relevância
A pesquisa das questões e interesses dos alunos é valorizada	Os pontos de vista dos alunos sobre os conceitos eram explorados pela professora
Os materiais incluem fontes primárias e materiais manipulativos	A professora recomendava aos alunos a consulta de livros de Análise Matemática e Matemática Aplicada à Economia na biblioteca da instituição
A aprendizagem é interativa, construída sobre aquilo que o aluno já conhece	Contribuição dos alunos nos conceitos construídos, nas definições, nos exemplos e nos exercícios apresentados.
Os professores mantêm um diálogo com os alunos, ajudando-os a construir o seu próprio conhecimento	Os alunos eram permanentemente envolvidos nas abordagens da professora com convites frequentes
O papel dos professores é interativo, assente na negociação	
A avaliação inclui os trabalhos do aluno, observação e os seus pontos de vista, assim como testes. O processo é tão importante quanto o produto	Contribuição dos alunos nos critérios de avaliação, bem como na delimitação dos conteúdos a avaliar
O conhecimento é visto como dinâmico, em constante mutação com as nossas experiências	A professora valorizava a perspetiva económica de conceitos não se limitando à perspetiva matemática
Os alunos trabalham primeiramente em grupos	Em aulas práticas (e nas partes práticas das aulas teórico-práticas) os alunos tinham a oportunidade de interagir em

	grupos formados segundo as suas preferências

É importante referir que a escala de avaliação do aproveitamento dos alunos é de 0 a 20 e à mesma corresponde uma escala qualitativa: mau (de 0 a 4), medíocre (de 5 a 9), suficiente (de 10 a 13), bom (de 14 a 16), muito bom (17 e 18) e excelente (19 e 20).

2.3.2 Caraterização dos participantes

Uma figura bastante importante nesta investigação foi a professora da unidade curricular Matemática I. Trata-se de uma professora, na altura em que se iniciou a recolha de dados, com mais de 15 anos de experiência no ensino da Matemática no Ensino Superior. A mesma, durante a investigação, ostentava o grau académico de mestre em Educação Matemática e uma licenciatura em Ensino da Matemática.

Os 10 alunos aos quais aplicámos o questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3) tinham idades compreendidas entre os 18 e os 20 anos, são formados a nível secundário em Ciências Físicas e Biológicas em três instituições diferentes e, do Ensino Secundário para o Ensino Superior, não ficaram anos letivos sem estudar. Em relação às respostas dadas à questão 6 do questionário de caraterização dos alunos (Apêndice 1), os 10 alunos declararam ter conhecimentos de funções, Cálculo Diferencial e Cálculo Integral de 3 a 5, ou seja, de médio a muito bom, com maior predominância das opções 3 e 4, médio e bom, respetivamente. Nenhum dos 10 alunos trabalhava, todos eles apenas estudavam. De maneira geral os alunos consideraram a Matemática importante para o seu curso por permitir aplicar métodos e fórmulas à sua área de formação. Nenhum deles trabalhava na altura e não manifestaram aversão à Matemática.

A seguir apresentamos os nomes dos 10 alunos: Alexandra, Amarildo, Amaro, Ana, Armindo, Edson, Eduardo, Efigénio, Elias e Emanuela. Estes nomes são fictícios, garantindo, assim, o anonimato dos participantes.

Em termos de aproveitamento escolar — cotegorizado em fraco (suficiente, medíocre e mau), bom e muito bom — no Ensino Secundário, e tendo como referência as médias obtidas a este nível, a Alexandra, o Armindo, o Edson, o Eduardo, o Efigénio, o Elias e a Emanuela tiveram fraco aproveitamento escolar, a Ana e o Amarildo tiveram bom aproveitamento escolar, o Amaro tive muito bom aproveitamento escolar. Esta categorização feita por via das médias obtidas no Ensino Secundário não tem diferenças significativas em relação às respostas dadas pelos alunos à questão 6 do questionário de caraterização dos alunos (Apêndice 1), pois os alunos de fraco aproveitamento escolar escolheram as categorias 2 ou 3, os alunos de bom aproveitamento escolar escolheram as categorias 3 ou 4, e o de muito bom aproveitamento escolheu as categorias 3 ou 4.

Em relação à importância da Matemática — questões 7 e 8 do questionário de caraterização dos alunos (Apêndice 1) —, é de referir que todos os alunos reconhecem a Matemática como sendo importante para sua formação e para o domínio de conceitos do seu curso. Apesar disso, os alunos não indicam concretamente de que forma ou em que conceitos a Matemática é últil para o seu curso.

Importa referir que, cerca de um mês antes do arranque das aulas, os alunos são submetidos a um exame de acesso em que são avaliados, entre outros, conteúdos de Matemática do Ensino Secundário. O exame de acesso — e não de aptidão — é a via pela qual se seleciona os alunos que preenchem as vagas existentes nos primeiros anos dos cursos da instituição

CAPÍTULO 3. Apresentação dos resultados

Neste capítulo apresentamos, de forma exaustiva, os dados recolhidos durante a investigação. com os mesmos procurámos caraterizar a estrutura cognitiva dos alunos nas fases inicial, nos primeiros dias de aula, e final, depois da última aula, da lecionação da unidade curricular Matemática I. Os conceitos de função, derivada e integral estiveram na base da caraterização. Pudemos também notar e caraterizar a evolução das estruturas cognitivas dos alunos, tendo inicialmente trabalhado com 10 e, posteriormente, com três, dando maior profundidade à abordagem. No fim dos tópicos tabelas síntese são apresentadas com o objetivo de se ter uma visão geral da caraterização feita no tópico. É importante referir que, por vezes, se vai usar o termo aprendizagem para qualificar os desempenhos dos alunos.

3.1 Caraterização da estrutura cognitiva dos alunos no início do estudo

Os conceitos em torno dos quais se investiga a aprendizagem dos alunos são os de função, derivação (por definição e por tabela) e integração. Como se sabe a função constitui o objeto de estudo do Cálculo e os conceitos de derivação e de integração são vias pelas quais se faz predominantemente o estudo do objeto. Foi feita uma seleção, tendo como critérios considerados os constantes do questionário de caraterização dos alunos (Apêndice 1), nomeadamente curso frequentado no Ensino Secundário; número de anos letivos sem estudar Matemática antes de ingressar no Ensino Superior; número médio de horas por dia dedicadas ao estudo em casa; metodologia de aprendizagem; bibliografia de apoio utilizada; conhecimentos prévios dos conceitos em estudo na tese; importância atribuída à Matemática pelo aluno; importância da Matemática para o curso na ótica do aluno; no caso de trabalhadores, importância da Matemática para o seu trabalho na sua ótica; fatores que influenciam o aproveitamento académico do aluno na sua própria ótica. As respostas dadas ao questionário permitiram identificar os alunos a entrevistar. Feitas as entrevistas cujo guião (Apêndice 2) teve como base o questionário de caraterização dos alunos (Apêndice 1), foram selecionados 10 alunos. Com os inquéritos, por questionário e por entrevista, selecionámos os alunos com condições mais favoráveis para a frequência do Cálculo, reduzindo-se tanto quanto possível fatores que poderiam influenciar na sua aprendizagem. As teorias à luz das quais se faz a presente caraterização são as teorias APOS e da Reificação.

Após a aplicação aos alunos do questionário de caraterização da sua estrutura cognitiva (Apêndice 3) obteve-se dados que, expostos nas secções seguintes, permitem-nos ter um quadro do nível de conhecimentos dos alunos à partida da investigação. É importante ter em conta que esta avaliação é feita em função do nível de conhecimentos que os alunos devem trazer do Ensino Secundário, o nível de ensino imediatamente inferior ao Ensino Superior. O questionário, embora não seja nem um instrumento ACP nem PCC, é compatível com as suas taxonomias. Para consolidar os dados obtidos na aplicação do questionário, servimo-nos das entrevistas (Apêndice 5) feitas posteriormente aos alunos. As mesmas permitiram-nos aprofundar e melhor descrever os dados e informações obtidos da aplicação dos questionários.

Procurámos caraterizar o nível de conhecimento dos alunos sob quatro perspetivas: algébrica, gráfica, numérica e descritiva. As três primeiras perspetivas tiveram como fonte principal o questionário aplicado aos alunos, ao passo que a quarta perspetiva teve como fonte principal as entrevistas feitas aos mesmos.

3.1.1 Estrutura cognitiva associada ao conceito de função

Nesta secção as questões do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3) consideradas são as seguintes:

1. O que entende por função?
2. Dada a função $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$:

a) Determine a sua imagem nos pontos 2, $-\frac{1}{2}$, -2 e 0;

b) Determine o seu domínio.

3. Dada a função $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1 & se\ x \leq 1 \\ \frac{1-\sqrt{x}+\cos(x-1)}{1-x} & se\ x > 1 \end{cases}$:

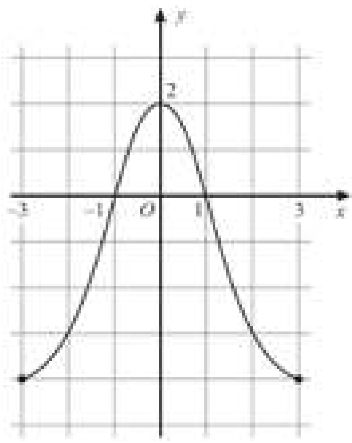
a) Determine a sua imagem nos pontos 1 e 0;

b) Determine o seu domínio.

4. Considere as funções $f(x) = \frac{x}{x-1}$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Determine:

   a) $f \circ g$; b) $g \circ f$.

5. Seja f com o domínio $\mathrm{D} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | -3 \leq \mathrm{x} \leq 3\}$ e o gráfico seguinte:



Seja $g(x) = \cos x$. Indique as soluções da equação $(f \circ g)(x) = 0$:

a) $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$; b) $S = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$; c) $S = \{0, \pi\}$; d) $S = \{-\pi, \pi\}$.

6. Considere a tabela seguinte:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

Determine:

a) $f(g(1))$; b) $(f \circ g)(6)$; c) $g(g(1))$; d) $(g \circ f)(3)$

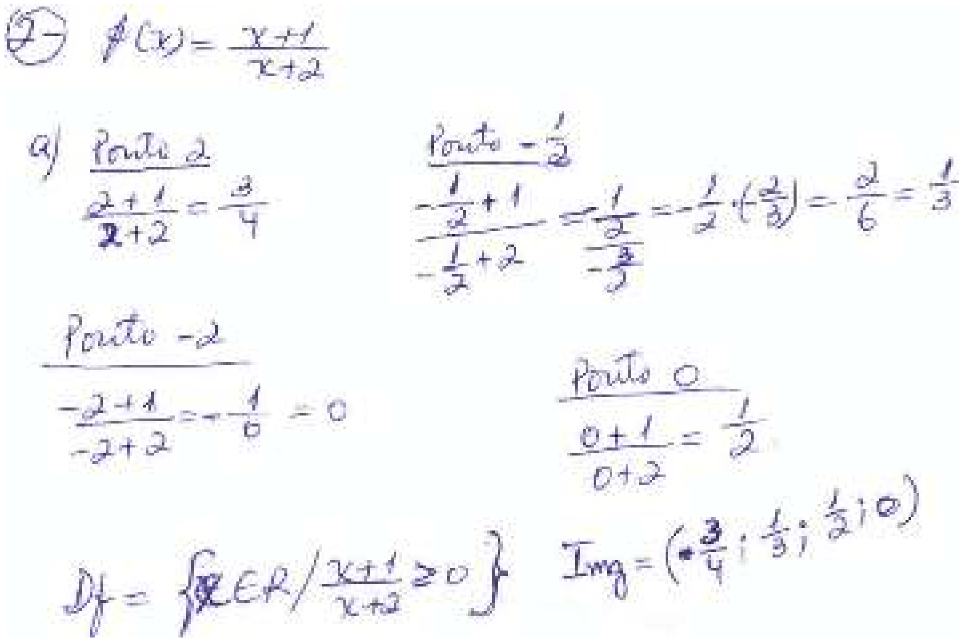
3.1.1.1 Alexandra

Resposta à questão 1. Esta primeira questão ficou sem resposta no questionário. Na entrevista a resposta foi dada com um discurso desarticulado, o que mostra que a aluna tem noção de função, mas dificuldade de exprimir tal noção.

> Entrevistador: O que entende por função?
>
> Alexandra: Função é tipo… quando temos x e queremos encontrar y, mas temos que fazer alguns cálculos para isso. A função tem sempre duas variáveis, x e y, x fica na horizontal e y fica na vertical.
>
> Entrevistador: Que cálculos?
>
> Alexandra: Uma equação onde substituímos x para conseguir encontrar y. Primeiro substituímos o valor de x na equação, depois fazemos os cálculos necessários para encontrar o y.

Na entrevista nota-se que, embora sem o rigor necessário da linguagem, está presente a ideia de transformação sem se referir às ideias de domínio e contradomínio. Nota-se o nível operacional com que a aluna trata o assunto e também a desarticulação ao misturar uma explicação algébrica com gráfica, bem como a denominação de equação à forma analítica da função.

Resposta à questão 2 (Figura 0.1).


2- $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

a) Ponto 2

$\frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$

Ponto $-\frac{1}{2}$

$\frac{-\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{2}+2} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Ponto -2

$\frac{-2+1}{-2+2} = -\frac{1}{0} = 0$

Ponto 0

$\frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$

$Df = \left\{x \in R / \frac{x+1}{x+2} \geq 0\right\}$ $Img = \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 0\right)$

Figura 0.1 Resposta à questão 2 (Alexandra)

Esta questão (Figura 0.1) tem duas alíneas, na alínea a) pede-se as imagens da função nos pontos de abscissas $x = 2$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = -2$ e $x = 0$, na alínea b) pede-se o seu domínio. Ambas alíneas referem-se à função $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$. Na primeira, em que se deve calcular as imagens de quatro pontos, ao calcular a imagem do ponto $x = -\frac{1}{2}$, a aluna faz confusão com os sinais tanto no numerador como no denominador.

Apesar disso, por ter cometido o mesmo erro duas vezes, chega ao resultado correto. Ao calcular a imagem do ponto -2, revela ter dificuldades quanto à divisibilidade por zero. Quanto à alínea b), revela não dominar os conceitos de domínio e de contradomínio de uma função. Não sabe relacionar a determinação da imagem com a inexistência da imagem da função no ponto -2. Ora aqui está um efeito dominó, ou seja, por não dominar o conceito de divisibilidade por zero não consegue concluir que -2 é um ponto de descontinuidade, o que não lhe permite levar isto em conta na determinação do domínio. Mesmo não fazendo parte do que se pede na questão, a aluna tenta apresentar o contradomínio da função. Fica pela tentativa, pois, em vez de apresentar o contradomínio da função apresenta um conjunto das imagens dos quatro pontos calculadas na alínea anterior. Em $Img = \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 0\right)$, a aluna mistura caraterísticas de representação de conjunto numérico com caraterísticas de representação de par ordenado. Se em vez de parênteses utilizasse chavetas, teríamos um conjunto numérico. Se separasse as imagens e associasse a cada uma delas ao seu elemento correspondente do domínio, teríamos pares ordenados. Nota-se a confusão entre dois conceitos de representação, conjunto numérico e par ordenado.

Resposta à questão 3 (Figura 0.2).

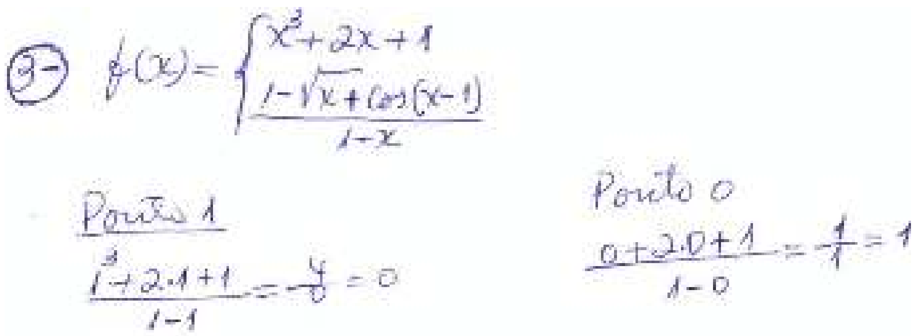


Figura 0.2 Resposta à questão 3 (Alexandra)

Aqui (Figura 0.2) pouco foi feito, a aluna não consegue encontrar uma estratégia de resolução. Mais uma vez fica clara a necessidade de se trabalhar no conceito que tem de função. Nota-se a incipiência que a aluna tem do conceito de função, pois não consegue sair do elementar, não consegue transcrever a função na íntegra, o que se constata na entrevista como sendo o não reconhecimento da função dada na forma de dois ramos. A aluna não consegue identificar o domínio da função, o que lhe dificulta na determinação da imagem solicitada na alínea a). Podemos apontar duas razões para a sua dificuldade na determinação do domínio: (1) as dificuldades que já apresentou na questão 2a), quando se lhe pedia o domínio; (2) dificuldades em trabalhar com a função dada na forma de dois ramos.

Resposta à questão 4 (Figura 0.3).

Figura 0.3 Resposta à questão 4 (Alexandra)

Esta resolução (Figura 0.3), ou tentativa de resolução, revela bem as dificuldades que a aluna tem com o conceito de função composta. Claramente confunde o símbolo de composição de funções ($\circ$) com o da operação de multiplicação ($\cdot$), o que teve consequências na sua resolução. A resolução revela também dificuldades que a aluna tem nas propriedades dos radicais. A esta altura o conceito de radical e suas propriedades requer-se já reificado e capsulado, conforme se concebe nas teorias da Reificação e APOS, respetivamente. Neste caso, as dificuldades na compreensão do conceito de radical dificultam a compreensão do conceito de função composta.

As demais questões sobre funções (5 e 6) foram deixadas em branco pela aluna. Perguntada em entrevista sobre as mesmas, a aluna manifesta não ter opinião formada a respeito.

A Alexandra, nas quatro perspetivas consideradas — algébrica, geométrica, numérica e descritiva —, revela conhecimentos e habilidades a nível da ação elementar. É um caso de uma aluna de nível de compreensão incipiente, uma aluna que alcança o mínimo necessário dos objetivos estabelecidos no Ensino Secundário, com aproveitamento fraco a este nível. Lida com funções a nível de ação, consegue reconhecer e fazer operações evidentes com símbolos algébricos, mas tem dificuldades em antever algumas consequências das operações que faz, às vezes parece mesmo inocente e inconsequente nos seus atos. Depois de alguns passos dados, com alguma frequência, precisa de uma ajuda por parte de um colega ou de um professor para retomar o curso normal da sua resolução. Do ponto de vista da representação numérica, o cenário não é diferente. Posta a forma algébrica de parte e trabalhando apenas com elementos do domínio, do contradomínio e com a lei da função, parece que o raciocínio se complica um pouco mais para esta jovem. A dada altura fica-se com a impressão de que se está a abordar com ela um assunto diferente. Até consegue operar os elementos que se lhe apresentam, mas enquadrar tais operações com o conceito de função é-lhe mais difícil. No que diz respeito à representação gráfica, encontra-se também ao nível incipiente. Às vezes dá a impressão de carecer de alguns conceitos prévios sobre o sistema de coordenadas cartesianas, daí a necessidade de, com ela, assegurar com alguma frequência o nível de partida, para que não se perca por questões elementares e consiga progredir naquilo que realmente se quer tratar. Em relação ao conceito que tinha e à capacidade de descrição do que fazia, conseguia apresentar o conceito de função de maneira algo desarticulada relativamente aos subconceitos aí presentes. Tinha noções e recitava palavras-chave do conceito de função, mas manifestava não entender bem o sentido e o significado da relação entre tais palavaras-chave.

Sobre a abordagem de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), (Tabela 9), nas respostas dada pela aluna às questões sobre funções constatamos a ação mental 1 (AM1), por ser percetível a sua capacidade de estabelecer relações de dependência entre as variáveis de uma função. São notórias algumas das dificuldades descritas por Tall (1992) como imagem mental de função restrita e dificuldade em lidar com representação gráfica e tabular.

3.1.1.2 Amarildo

Resposta à questão 1 (Figura 0.4).

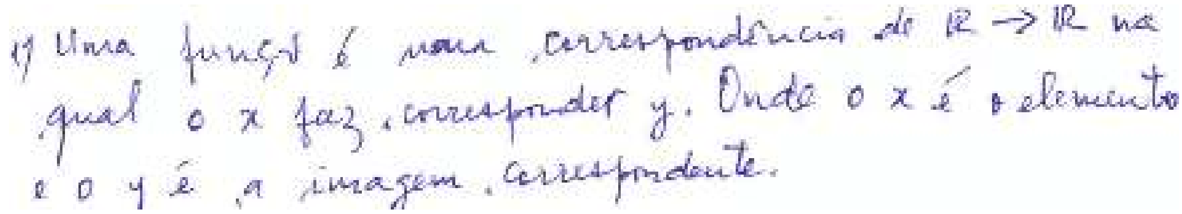
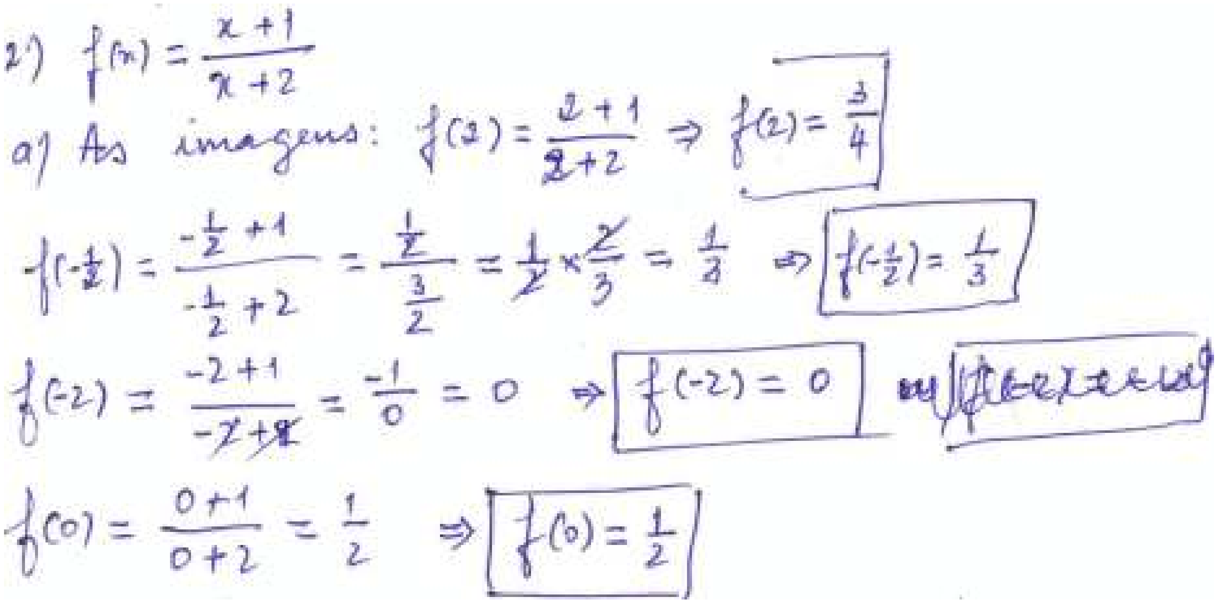

1) Uma função é uma correspondência de IR → IR na qual o x faz corresponder y. Onde o x é o elemento e o y é a imagem correspondente.

Figura 0.4 Resposta à questão 1 (Amarildo)

Embora se pudesse falar mais sobre a lei da correspondência que relaciona o domínio com o contradomínio, embora se pudesse deixar claro que tanto o domínio como o contradomínio da função são subconjuntos de ℝ e não necessariamente ℝ, aqui está um conceito que revela que o aluno consegue articular as suas principais componentes. Temos aqui um conceito que se aproxima ao da definição formal de função, necessitando apenas de uma melhor coordenação entre os elementos constituintes. O aluno mostra-se claro e coerente, embora com algumas imprecisões de linguagem.

Resposta à alínea a) da questão 2 (Figura 0.5).


2) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

a) As imagens: $f(2) = \frac{2+1}{2+2} \Rightarrow \boxed{f(2) = \frac{3}{4}}$

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{-\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{2}+2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}}$

$f(-2) = \frac{-2+1}{-2+2} = \frac{-1}{0} = 0 \Rightarrow \boxed{f(-2) = 0}$ [illegible]

$f(0) = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{f(0) = \frac{1}{2}}$

Figura 0.5 Resposta à alínea a) da questão 2 (Amarildo)

Na resolução da alínea a) (Figura 0.5), em termos de ação, no cálculo da imagem de pontos, o aluno tem um desempenho notável. Na substituição do ponto $x = -2$, apresenta um problema de base que tem a ver com a divisibilidade por 0. É um problema de conceito cuja resolução é importante sob pena de interferir negativamente na compreensão do conceito de função, de limite e, consequentemente, de outros conceitos fundamentais no estudo de funções.

Resposta à alínea b) da questão 2 (Figura 0.6).

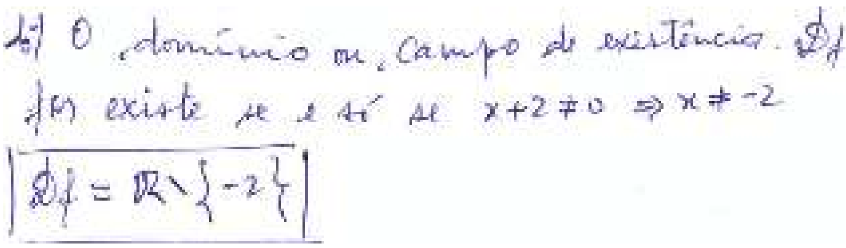


Figura 0.6 Resposta à alínea b) da questão 2 (Amarildo)

Quanto à resolução da alínea b) da 2.ª questão (Figura 0.6), o aluno resolve corretamente, materializando corretamente o conceito que tem de função. O problema que manifesta na divisibilidade por zero na alínea a) não se repercute negativamente aqui. A julgar pelo trecho seguinte da entrevista, tudo indica que as duas partes conflituantes — imagem da função no ponto $x = -2$ e domínio da função — são tratadas em compartimentos diferentes do seu raciocínio, daí não se ter apercebido do conflito.

Entrevistador: Por que razão o ponto $x = -2$ não faz parte do domínio?

Amarildo: Porque nas funções racionais o denominador não pode ser igual a zero.

Entrevistador: Não pode ser zero? E se for, que efeitos tem sobre a função?

Amarildo: Ignora-se.

Resposta à alínea a) da questão 3 (Figura 0.7).

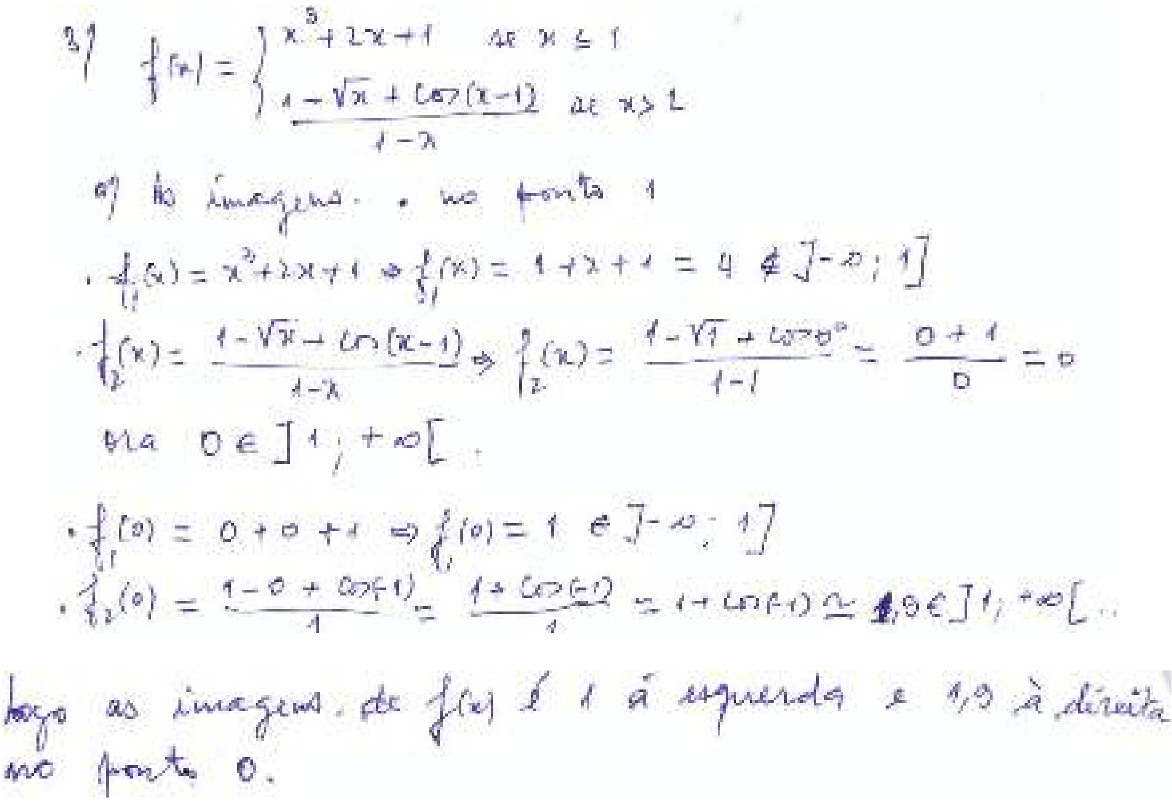


Figura 0.7 Resposta à alínea a) da questão 3 (Amarildo)

Apesar de apresentar uma definição coerente para o conceito de função, nesta questão (Figura 0.7) o aluno não consegue materializá-lo. Não é de estranhar, pois um dos aspetos que fica por pormenorizar no conceito que apresenta de função é o da lei da correspondência entre o domínio e o contradomínio. É aqui que está a dificuldade, uma vez que a lei da correspondência apresenta-se sob uma forma menos usual, uma função de dois ramos. Nota-se que faz uma confusão entre o que se faz para o cálculo de imagem e o que se faz para o cálculo de limite de uma função num ponto. Falta-lhe considerar os subdomínios tendo em conta os ramos que a função tem. O aluno procura calcular as imagens dos pontos, $x = 1$ e $x = 0$, nos dois ramos, o que não se enquadra no conceito de função por duas razões: (1) para que seja função, os pontos do domínio só podem ter uma imagem e não duas; (2) os pontos do domínio só podem pertencer a um dos subdomínios e não aos dois. O aluno estabelece uma relação de pertença entre as imagens encontradas e os subdomínios da função. Ora, esta relação não tem razão de ser, pois o correto é relacionar imagens com o contradomínio da função.

Resposta à alínea b) da questão 3 (Figura 0.8).

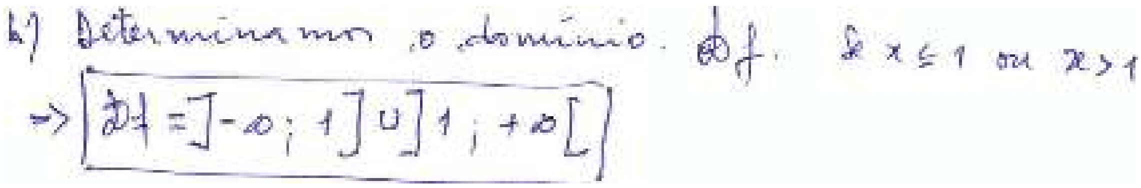


Figura 0.8 Resposta à alínea b) da questão 3 (Amarildo)

Nesta alínea (Figura 0.8), o aluno apresenta corretamente o domínio, muito embora pudesse representá-lo de uma maneira muito mais simples, escrevendo simplesmente $D_f = \mathbb{R}$. O aluno revela alguma dificuldade na representação dos objetos matemáticos. Na alínea anterior, a), o aluno não conseguiu explorar melhor o conceito que aqui apresenta de domínio. A julgar pelas resoluções nas alíneas a) e b), podemos inferir que, conforme a questão, o aluno tem diferentes representações do conceito de domínio. Na alínea b) apresenta corretamento o domínio, ao passo que na alínea a) tem dificuldades em aplicá-lo no cálculo das imagens.

Resposta à questão 4 (Figura 0.9).

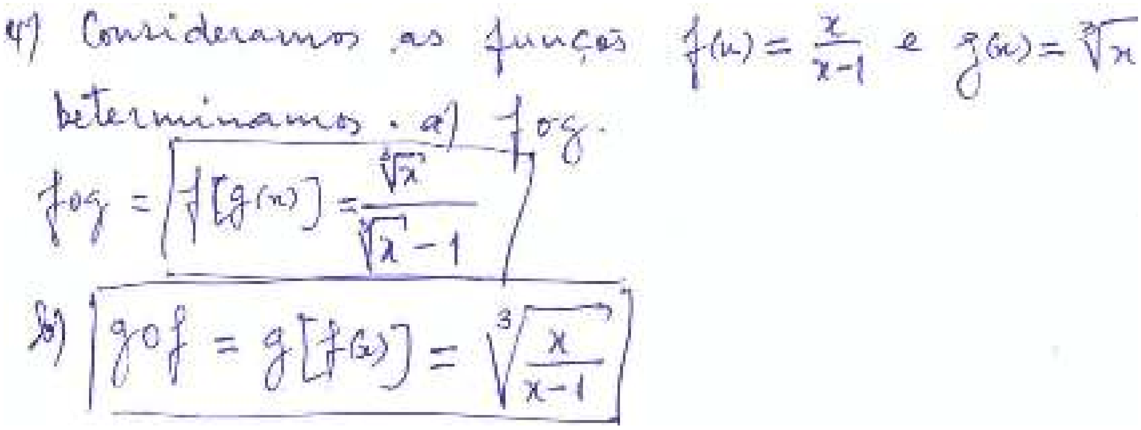


Figura 0.9 Resposta à questão 4 (Amarildo)

Aqui (Figura 0.9) o aluno resolve corretamente e consegue, sem dificuldades, considerar uma função como argumento da outra e, consequentemente, fazer a composição de função, para além de uma mera substituição de x por $g(x)$ ou de x por $f(x)$. Nota-se que, nesta representação de domínio de função, o aluno está acima da ação elementar, acima da incipiência, está a nível de processo, pois o seu raciocínio não se atem a uma mera substituição da variável independente. Temos aqui mais uma representação de domínio de função em que o aluno apresenta bom desempenho, considerando as dificuldades em exercícios em que o domínio é apresentado de forma diferente, podemos inferir alguma memorização de exercícios típicos por parte do aluno.

> Entrevistador: Que diferenças pode indicar entre as alíneas a) e b)?
>
> Amarildo: Nas duas alíneas, a partir de $f(x)$ e de $g(x)$ fizemos duas novas funções. Tínhamos dois domínios e duas imagens, passamos a ter um de cada. Na alínea a) o domínio é de $g(x)$ e a imagem é de $f(x)$, na alínea b) é o contrário.

Resposta à questão 5 (Figura 0.10).

Figura 0.10 Resposta à questão 5 (Amarildo)

Nesta resolução (Figura 0.10), embora não apresente os passos que o levaram à solução, o aluno consegue responder corretamente. Atendendo às dificuldades apresentadas na resolução da 6.ª questão, que concetualmente não difere da 5.ª, podemos inferir que a solução que o aluno apresenta desta questão pode ser resultante de exclusão de soluções menos prováveis, nomeadamente as alíneas a), b) e d), tendo-lhe restado apenas a alínea c).

> Entrevistador: A 6.ª questão ficou por responder. Quer dizer algo a respeito?
>
> Amarildo: Não vi bem o que tinha que fazer.
>
> Entrevistador: O mesmo que na 4.ª e na 5.ª questões.
>
> Amarildo: Como assim?
>
> Entrevistador: [Indicando a tabela dos valores das funções] Por exemplo para $f\big(g(1)\big)$, $g(1) = 6$ encontra-se na interseção entre a coluna em que $x = 1$ com a linha $g(x)$, dá para entender?
>
> Amarildo: Sim, é a imagem de $g(x)$, quando $x = 1$.
>
> Entrevistador: Certo. [Indicando a tabela dos valores das funções] Agora, considerando este resultado como sendo valor de x, do mesmo modo procuramos por $f\big(g(1)\big)$, é o mesmo que dizer procuramos por $f(6)$.
>
> Amarildo: OK, OK, estou a ver.
>
> Entrevistador: Então, a que resultado chegamos?
>
> Amarildo: $f(6) = 5$.
>
> Entrevistador: E $f\big(g(1)\big)\dots$?
>
> Amarildo: Igual a 5, também. É a mesma coisa.

Das três questões relacionadas com funções compostas, 4, 5 e 6, a 6.ª é a única que fica por responder. As duas primeiras foram respondidas corretamente, já a última fica totalmente em branco. Isto deve-se ao facto de se lhe apresentar um mesmo conceito de maneira diferente, uma mudança de quadro, maneira nova para o aluno, problema novo para o aluno, o que revela dificuldade de descapsular o conceito, considerar outros conceitos e voltar a capsular um conceito que já mostrou dominar, quando apresentado de maneira mais simples. Alguns esclarecimentos relacionando essa forma diferente de apresentar o conceito com as duas primeiras elucidaram o aluno durante um breve diálogo com o investigador.

Do ponto de vista algébrico, o Amarildo resolve corretamente exercícios que lhe são típicos, tendo dificuldade em descapsular e voltar a capsular conceitos em exercícios diferentes dos que lhe são típicos. Nota-se claramente que tinha interiorizado alguns processos e que, consequentemente, facilmente prescindia de alguns passos para seguir em frente nas suas resoluções. É capaz de, por si só, chegar ao fim de uma resolução, rever todos os passos anteriores e encontrar e corrigir insuficiências.

Progride bem e com firmeza. Em termos de representação numérica das funções tem alguma dificuldade à partida, depois de alguns esclarecimentos, consegue enquadrar-se satisfatoriamente, dando os passos seguintes por si só. Na perspetiva de representação numérica, não está muito longe de evoluir do nível de ação para o nível de processo. No que à representação gráfica diz respeito, o Amarildo apresenta um bom desempenho. É capaz de reconhecer funções e suas caraterísticas a partir dos seus gráficos. Em relação ao conceito que tem e à capacidade de descrição do que faz, consegue transmitir a ideia de função sem dificuldades. Principalmente com exemplos, consegue apresentar a relação entre os subconceitos presentes dentro do conceito de função.

Em relação às dificuldades enumeradas por Tall (1992) na aprendizagem do Cálculo, o aluno tem dificuldades em lidar com a representação tabular de função. Sobre as ações mentais de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), (Tabela 9), identificámos a 1 (na Figura 0.4 o aluno apresenta a relação de dependência de y em x). Em relação às categorias da Taxonomia de Prontidão do Conceito de Cálculo de Carlson, Madison, & West (2015) (Tabela 11) — (1) habilidades de raciocínio, (2) compreender, representar e interpretar padrões de crescimento de função, (3) compreender e usar conceitos e ideias, (4) compreender ideias centrais de trigonometria, (5) outras habilidades —, o aluno tem domínio considerável, o que o torna apto a frequentar a unidade curricular de Cálculo.

3.1.1.3 Amaro

Resposta à questão 1 (Figura 0.11), onde se pergunta o que entende por função. Nota-se aqui autorreferenciação no conceito que apresenta de função, o que denota, à partida, falta de argumentação formal.

Figura 0.11 Resposta à questão 1 (Amaro)

Entrevistador: Na sua resposta à primeira questão do questionário, “O que entende por função?”, respondeu que “Uma função é uma função onde a variável é determinada por uma incógnita.”. Se você me perguntasse “O que é a Matemática?” e eu lhe respondesse que “A Matemática é a Matemática onde se trabalha com números.”, estaria satisfeito com a minha resposta?

Amaro: Não.

Entrevistador: Porquê?

Armaro: Estaríamos a falar da mesma coisa!

Entrevistador: Isto é autorreferenciação. Responder apoiando-se no conceito perguntado. Isto em si não é mau, por exemplo, utiliza-se de maneira bem-sucedida para definir o fatorial de um número, $n!$. Mas para o caso de funções, no geral, é necessário recorrer-se a subconceitos, conceitos dentro do de função. Quer tentar definir outra vez?

Amaro: Hm… Tipo domínio, contradomínio, variável independente, variável dependente, gráfico…

Entrevistador: Aos subconceitos e às relações entre eles.

Amaro: O domínio transforma-se no contradomínio através das variáveis independentes e dependentes.

Entrevistador: É por aí.

…

Entrevistador: No que diz respeito ao subconceito “incógnita”, o que lhe parece? Por que razão o inclui no conceito que apresenta de função?

Amaro: Porque nós vamos atribuindo valores à incógnita e, assim, vamos sabendo o seu valor e o da imagem.

Mas se atendermos ao que descreve nas entrevistas, notamos que depois de algum tempo de conversa e direcionamento, consegue sair do discurso concreto e autorreferenciado para o genérico com referência a subconceitos. Trata-se de um aluno que, com um bom asseguramento do nível de partida, facilmente retoma o rumo certo. Fica evidente a dificuldade que o aluno tem em lidar com o conceito de variável. Das suas três categorias, como classificadas por Trigueros & Usini (2003), incógnita, número genérico e variáveis relacionadas, a que se utiliza no conceito de função é a de variáveis relacionadas. O aluno manifesta uma visão, ainda que inconscientemente, da função como equação, onde se procura o(s) valor(es) da incógnita que a satisfaçam. O aluno apresenta um conceito incipiente de função.

Durante a entrevista, ao relacionar subconceitos dentro do de função, o aluno manifesta uma visão de covariação entre o domínio e o contradomínio, entre as variáveis independente e dependente, aquilo a que Oehrtman, Carlson & Thompson (2008) chamam de ação mental 1.

Resposta à alínea a) da questão 2 (Figura 0.12)

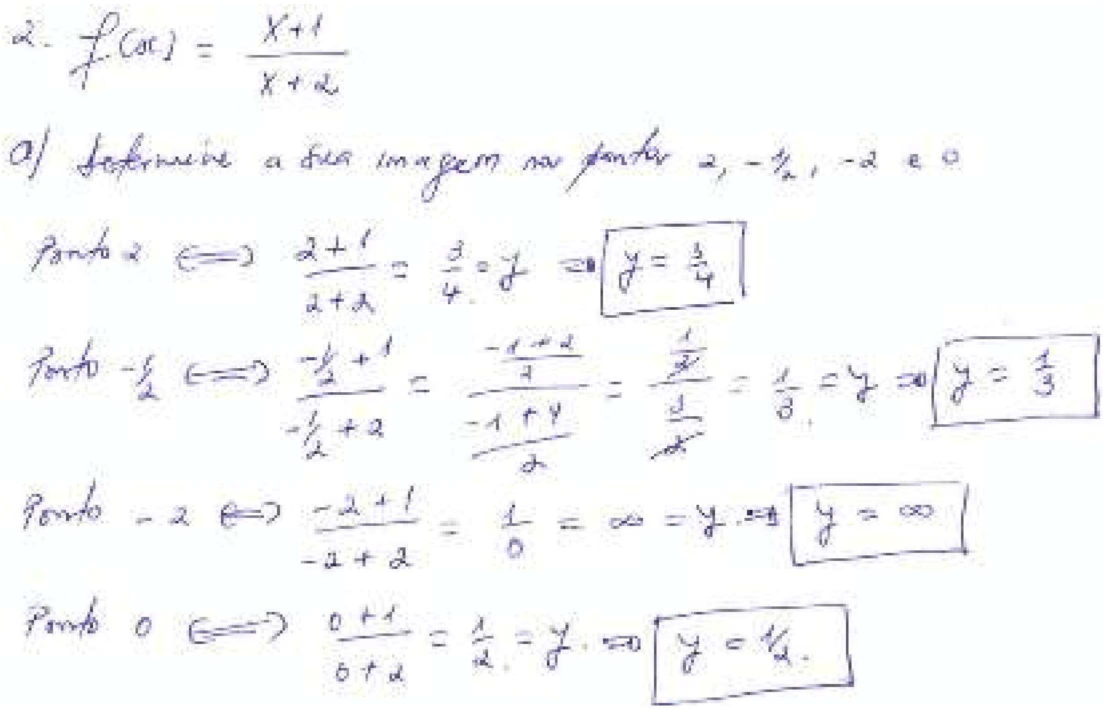


Figura 0.12 Resposta à alínea a) da questão 2 (Amaro)

Na resolução da alínea a) da questão 2 (Figura 0.12), sobre o cálculo da imagem da função $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ nos pontos 2, $-\frac{1}{2}$, -2 e 0. Notamos, na resolução, a capacidade que o aluno tem de atuar a nível de ação. Trata-se de sequências com as quais está bastante familiarizado, o que lhe permite abordar a questão sem dificuldade. Apesar disso, é importante ressaltar uma lacuna concetual, quando substitui o ponto -2 na função. Neste caso, em que também se engana no sinal do numerador, em vez de simplesmente parar em $\frac{1}{0}$ e declarar que não existe imagem no ponto de abscissa -2, colocando a seguir o símbolo $\nexists$, segue em frente considerando que tal quociente resulta em ∞. Ora, não estamos a lidar com quantidades que se aproximam infinitamente a um ponto, mas sim com quantidades exatas. Provavelmente o aluno fez confusão com o conceito de limite, conceito novo no Ensino Secundário.

Resposta à alínea b) da questão 2 (Figura 0.13).

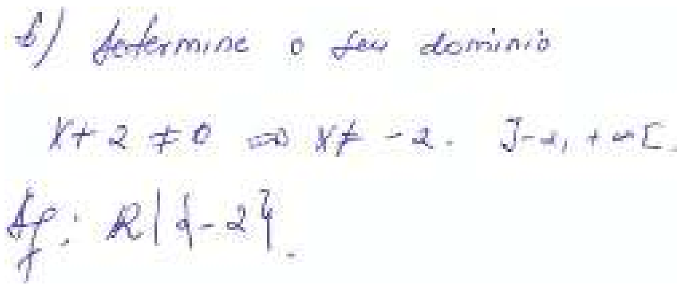


Figura 0.13 Resposta à alínea b) da questão 2 (Amaro)

Resolução da alínea b) da questão 2 (Figura 0.13), em que se pede o domínio da função $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$. Embora com falha na representação intervalar do conjunto do domínio da função, está aqui uma resolução que chega ao resultado procurado. A representação intervalar apresentada é $]-2, +\infty[$, quando o correto seria $]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$. Portanto, o aluno consegue apresentar algebricamente o resultado, mas, por fraca compreensão, não consegue apresenta-lo em forma de intervalos.

Resposta à alínea a) da questão 3 (Figura 0.14).

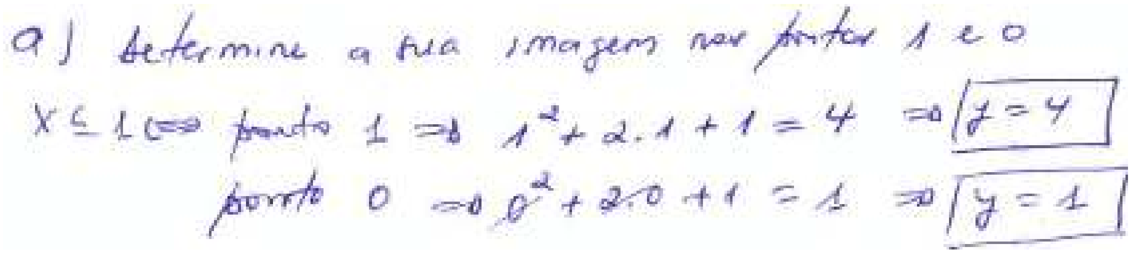

a) determine a sua imagem nos pontos 1 e 0
$x \leq 1 \Leftrightarrow$ ponto 1 $\Rightarrow 1^2 + 2.1 + 1 = 4 \Rightarrow \boxed{y = 4}$
ponto 0 $\Rightarrow 0^2 + 2.0 + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$

Figura 0.14 Resposta à alínea a) da questão 3 (Amaro)

Na alínea a) da questão 3 (Figura 0.14), em que se pede a imagem de uma função de dois ramos, $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1 & se\ x \leq 1 \\ \frac{1-\sqrt{x}+\cos(x-1)}{1-x} & se\ x > 1 \end{cases}$, nos pontos 1 e 0. É daquelas questões que requer alguma análise no lugar de mera ação. Na alínea a), o aluno deve identificar o ramo da função onde trabalhar, só depois disso partir para a procura das imagens. O aluno não explicita na sua resolução a etapa em que seleciona o ramo em que trabalha, diretamente trabalha no primeiro. Em nossa análise, explicitar seria: $f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1 + 1$, para o ponto 1, e $f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 + 0$, para o ponto 0. $f(1)$ e $f(0)$ revelam que se está a substituir na função dada e não diretamente num dos seus ramos. Claro, chega-se ao mesmo resultado, mas explicitar $f(1)$ e $f(0)$ revela melhor entendimento do conceito de função e, consequentemente, maior capacidade de se ajustar em situações novas ou aparentemente novas. Por outro lado, atendendo o nível do aluno, não explicitar $f(1)$ e $f(0)$ revela capacidade e síntese, revela escolha deliberada e com conhecimento.

Resposta à alínea b) da questão 3 (Figura 0.14)

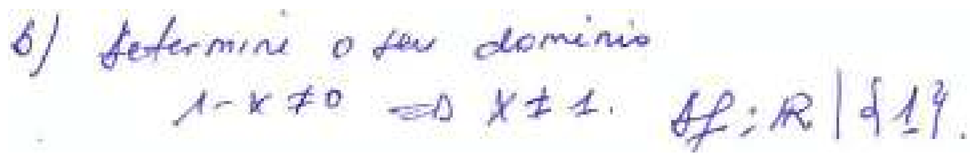

b) determine o seu domínio
$1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. $D_f: \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Figura 0.15 Resposta à alínea b) da questão 3 (Amaro)

Na alínea b) da questão 3 (Figura 0.14), em que se pede o domínio da função, o aluno revela dificuldades, ao fazer algo desnecessário e contraditório em relação ao entendimento manifestado na alínea a). O ponto 1 faz parte do subdomínio do primeiro ramo da função e, desta maneira, não é motivo de análise no segundo ramo da função. Notamos que o erro da resolução parte do conceito que o aluno tem de função de dois ou mais ramos, o erro está no início da resolução. Já foi possível notar que algebricamente o aluno tem capacidade para os passos subsequentes. Relacionando as resoluções das alíneas a) e b), podemos inferir que a escolha do ramo em que o aluno calcula as imagens não foi racional, embora seja a escolha correta.

Resposta à 4.ª questão.

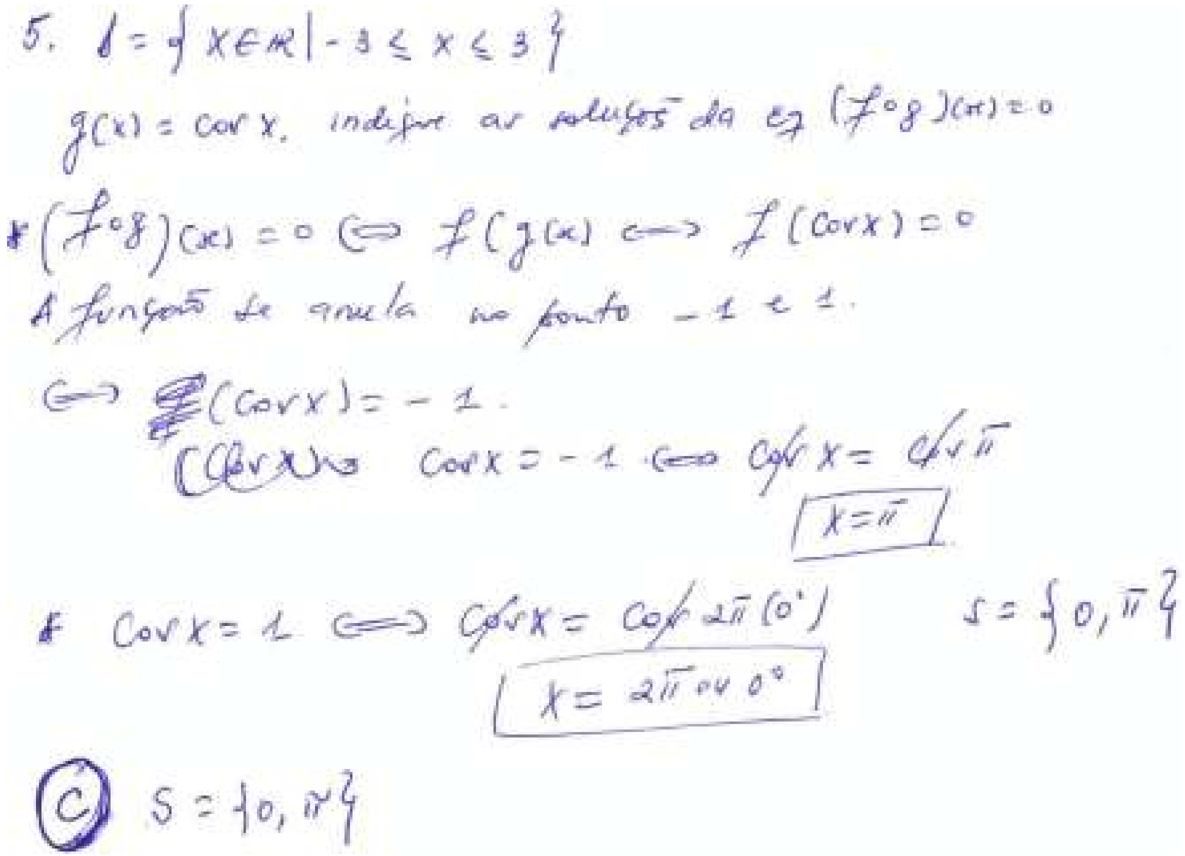

a) $(f\circ g)(x) \Rightarrow f(g(x)) \Rightarrow f(\sqrt[3]{x}) \Rightarrow \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}.$

Figura 0.16 Resposta à alínea a) da questão 4 (Amaro)


b) $(g\circ f)(x) \Rightarrow g(f(x)) \Rightarrow g\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \Rightarrow \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$

Figura 0.17 Resposta à alínea b) da questão 4 (Amaro)

Resposta à alínea a) da questão 4 (Figura 0.16 eFigura 0.17), em que, dadas duas funções, $f(x) = \frac{x}{x-1}$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$, pede-se $f \circ g$ e $g \circ f$, nas alíneas a) e b), respetivamente. Aqui o aluno exibe uma resolução bem conseguida em ambas alíneas. Revela boas capacidades algébricas ao conseguir considerar uma função no lugar da variável independente da outra. Revela boas habilidades em lidar com os símbolos. Álgebra não é um problema para o Amaro. Apesar de tudo, ainda faz confusão entre função e expressão algébrica ao usar o símbolo “⇒” no lugar de “=”.


5. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

$g(x) = \cos x$. indique as soluções da eq $(f\circ g)(x) = 0$

$(f\circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(g(x)) \Leftrightarrow f(\cos x) = 0$

A função se anula no ponto -1 e 1.

$\Leftrightarrow f(\cos x) = -1$.

$\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = \cos \pi$

$\boxed{x = \pi}$

$\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \cos 2\pi\ (0°)$ $\quad S = \{0, \pi\}$

$\boxed{x = 2\pi \text{ ou } 0°}$

C $S = \{0, \pi\}$

Figura 0.18 Resposta à questão 5 (Amaro)

O domínio que o aluno tem sobre funções compostas já é do nosso conhecimento e podemos constatar na resolução da questão 4 (Figura 0.16 e Figura 0.17). Aqui, na questão 5 (Figura 0.18), o mesmo conceito é tratado, mas apresentando-se uma função na forma algébrica e a outra em forma de gráfico. Apesar das condições aparentemente diferentes, é possível constatar a capacidade do aluno trabalhar com o conceito de função composta sem dificuldades. É de realçar também o bom desempenho algébrico apresentado pelo aluno não só nesta resolução, mas também nas resoluções anteriores.

Resposta à questão 6 (Figura 0.19).

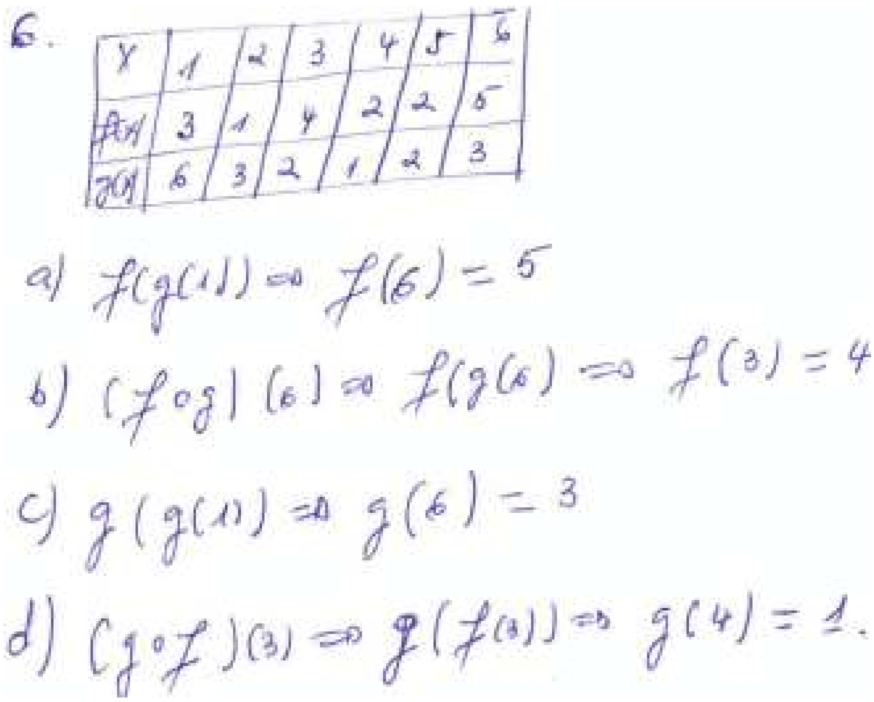


Figura 0.19 Resposta à questão 6 (Amaro)

Na questão 6 (Figura 0.19) mais uma vez o aluno trabalha com funções compostas, desta vez ambas apresentadas na forma tabular. Nas alíneas a), b), c) e d) realiza todos os procedimentos de forma correta.

> Entrevistador: Estas são as suas resoluções das questões 4, 5 e 6. Quer comentá-las?

> Amaro: Na 4 alínea a), mudámos o domínio de $f(x)$ de x para $g(x)$ e, na alínea b), trocámos as posições das funções e fizemos o mesmo. Temos duas funções novas em que domínio é uma função e a imagem é outra.

> Entrevistador: Nas questões 5 e 6, pode indicar-me as funções novas que encontrou?

> Amaro: Aí…

> Entrevistador: Sem formas analíticas, como conseguiu resolver as questões 5 e 6?

Amaro: Já se dá conta de como fazer pelo exercício. Usando os dados do exercício, mesmo sem a forma analítica das funções, deu para resolver.

O Amaro é um aluno de rendimento médio alto. Quanto à perspetiva algébrica de funções apresenta um bom desempenho no trabalho com as formas analíticas de funções. Consegue reconhecer os tipos de função, bem como as suas caraterísticas gerais. Muitas vezes a operacionalização na procura do domínio e do contradomínio da função coincidem com o que ele já antevê, o que claramente nos mostra que o aluno tem interiorizados processos e, portanto, trabalha a nível de processos com boas aspirações para trabalhar a nível de objeto. No que diz respeito aos conceitos que tinha e à capacidade de descrição dos mesmos, predominantemente com exemplos, explica o conceito de função, apresenta os elementos que fazem parte do conceito, bem como a sua relação. Importa assinalar a dificuldade que tem na representação intervalar do domínio — como exemplo temos a resolução da questão 2b —, bem como a dificuldade que tem na identificação do domínio de funções de dois ou mais ramos como acontece na questão 3b). Tem dificuldades em apresentar o conceito de maneira genérica sem se prender a exemplos.

No que diz respeito às representações gráfica e numérica de funções (Figura 0.18 e Figura 0.19), constata-se a visão de processo das funções tida pelo aluno, conforme abordado por Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008, p. 36), (Tabela 8). O aluno coordena sem dificuldades os processos de entrada e de saída de elementos do domínio e de elementos do contradomínio, respetivamente. A capacidade de coordenação nota-se também no que à representação gráfica diz respeito, consegue facilmente associar expressões analíticas a representações gráficas de funções. Consegue identificar caraterísticas de funções a partir dos seus gráficos. Consegue, analisando gráficos de funções, ter uma ideia mais ou menos precisa, conforme o caso, dos zeros da função. Consegue reconhecer o domínio e o contradomínio da função a partir da sua representação gráfica. Na resolução da equação $(f \circ g)(x) = 0$, tendo o ponto $y = 0$ do contradomínio, o aluno consegue fazer a reversão do processo e chegar à solução da equação. Independentemente da existência da forma analítica, independentemente da existência de fórmulas de funções, o aluno consegue dar resposta às questões que lhe são apresentadas com muito pouca dificuldade. Pelo que apresenta nas suas resoluções e em frases como "já se dá conta de como fazer pelo exercício", o aluno revela capacidade de imaginar todo o processo sem ter que executar cada ação, sem ter que passar minuciosamente por cada ação das suas resoluções. A sua prática revela uma visão dinâmica das funções e não restrita ou estática a determinados pontos do domínio.

Do exposto acima, pode-se fazer aferições sobre as ações mentais dos alunos no que diz respeito à covariação, conforme Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), (Tabela 9), abordam. No trabalho feito pelo aluno na representação gráfica de funções constatamos a ação mental 1, pois, nas resoluções de exercícios de composição de funções é notória a capacidade de coordenar a dependência de uma variável noutra.

3.1.1.4 Ana

Resposta à questão 1 (Figura 0.20), em que se pergunta o que entende por função.


A Funçaõ É uma relaçaõ de um conjunto A com uom conjunto B

Figura 0.20 Resposta à questão 1 (Ana)

Entrevistador: Quer acrescentar alguma coisa ao conceito que apresentou de função no questionário?

Ana: [silêncio reflexivo]

Entrevistador: Quer falar um pouco da relação existente entre os conjuntos A e B?

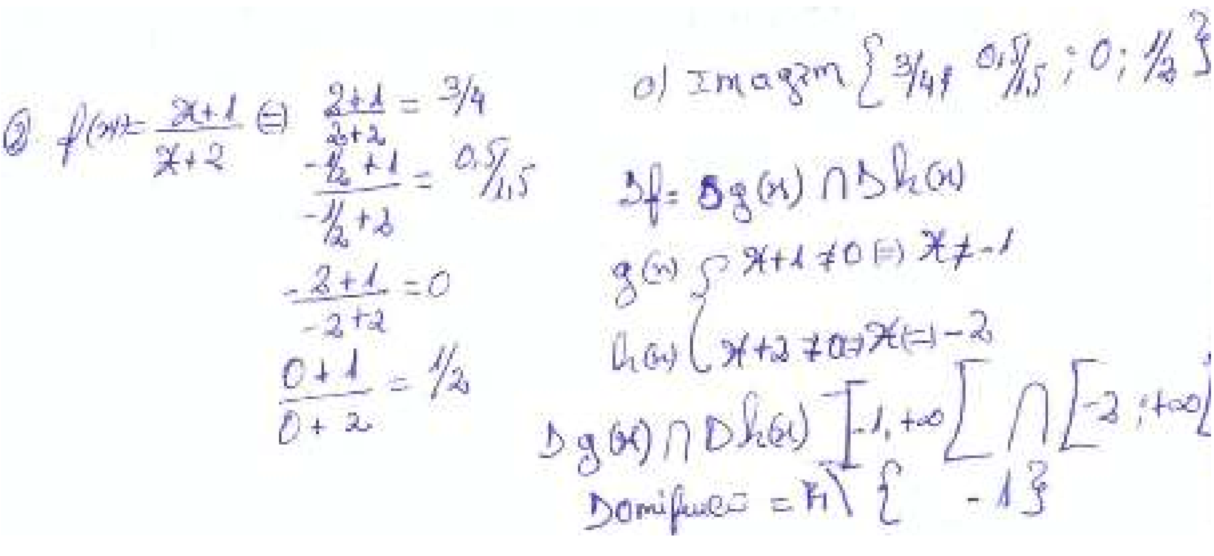
Ana: Posso dar exemplo?

Entrevistador: Conforme preferir.

Ana: Por exemplo, na questão 2 a relação que existe entre os conjuntos A e B é $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ porque permite transformar elementos do conjunto A em elementos do conjunto B.

O conceito de função apresentado pela Ana revela-se incompleto, pelo que não se consegue perceber que conjunto corresponde ao domínio e que conjunto corresponde ao contradomínio, não se consegue também perceber como a relação pode ser expressa e que conjunto ela transforma no outro. O conceito está incompleto, mas não necessariamente errado e, na descrição que a aluna tem a oportunidade de fazer ao longo da entrevista, podemos perceber que ela tem maior domínio do conceito de função do que aquilo que apresenta por escrito, ou seja, apoiando-se na expressão analítica da questão 2, $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, explicou como associar elementos do conjunto A a elementos do conjunto B. À medida que reflete sobre o conceito de função, em parte por força dos exercícios que lhe são apresentados, a aluna vai reconhecendo e adicionando propriedades ao seu conceito de função, ou seja, ocorre aprendizagem. A aluna revela um nível de compreensão do conceito de função instrumental.

Resposta à questão 2 (Figura 0.21).


$$f(x) = \frac{x+1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{2+1}{2+2} = 3/4 \quad \frac{-\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{2}+2} = 0{,}5/1{,}5 \quad \frac{-2+1}{-2+2} = 0 \quad \frac{0+1}{0+2} = 1/2$$

a) Imagem $\{3/4;\ 0{,}5/1{,}5;\ 0;\ 1/2\}$

$Df = Dg(x) \cap Dh(x)$

$g(x)\ x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

$h(x)\ x+2 \neq 0 \Rightarrow x \Leftrightarrow -2$

$Dg(x) \cap Dh(x)\ ]-1, +\infty[\cap]-2; +\infty[$

Domifunc $= R \setminus \{-1\}$

Figura 0.21 Resposta à questão 2 (Ana)

Na questão 2 (Figura 0.21), pede-se a imagem da função $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ nos pontos 2, $-\frac{1}{2}$, -2 e 0. Falta algum rigor na apresentação das imagens dos pontos 2, $-\frac{1}{2}$, -2 e 0. Todas elas são apresentadas na mesma sequência de passos, sem indicação do ponto cuja imagem se está a calcular, o que facilmente confunde observadores menos atentos. Na apresentação da imagem do ponto $-\frac{1}{2}$, o resultado é uma fração cujos numerador e denominador são dízimas, o que, mesmo não estando errado, não corresponde ao que é padrão na apresentação de resultados fracionários. O padrão é apresentar a fração simplificada, portanto, falta aqui a reificação dos conhecimentos sobre fração, o que dificulta obter e trabalhar com objetos fracionários. Na apresentação da imagem do ponto -2, em vez de simplesmente parar em $\frac{1}{0}$ e declarar que não existe imagem no ponto de abscissa -2, colocando a seguir o símbolo $\nexists$, segue em frente considerando que tal quociente resulta em 0. Não se trata de um caso com numerador igual a 0 e o denominador diferente de 0, trata-se do contrário, deste modo, o 0 não pode ser elemento absorvente. A aluna revela dificuldade em reificar algumas propriedades aritméticas. Confunde alguns elementos do contradomínio com o contradomínio da função. O conceito que tem de domínio é incipiente, para a sua determinação a aluna considera o numerador como $g(x)$ e o denominador como $h(x)$ e procura a interseção entre ambas funções num sistema de duas equações. Ora, uma vez que em funções racionais um polinómio do primeiro grau como numerador, como é o caso, não tem qualquer influência na determinação do domínio, o procedimento usado pela aluna não é sustentável e, claro, não produz os resultados desejados.

Resposta à questão 3 (Figura 0.22).

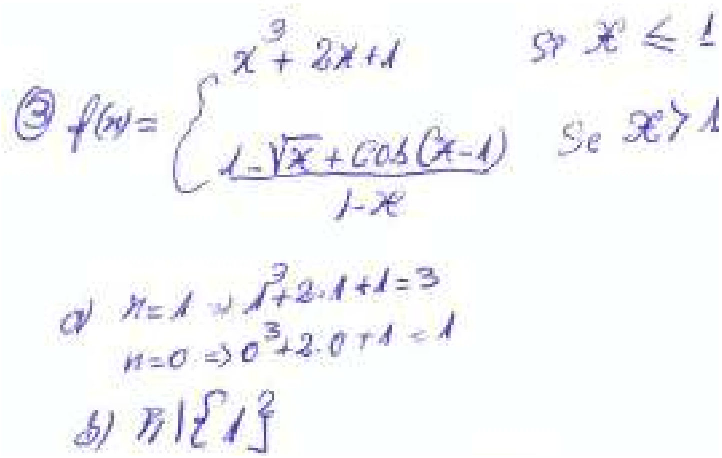


Figura 0.22 Resposta à questão 3 (Ana)

Em relação à questão 3 (Figura 0.22), na alínea a), a aluna volta a apresentar falta de rigor. Nota-se que consegue chegar ao resultado, mas carece de algum rigor na apresentação dos passos que a levam a tal. A função é de dois ramos, antes de se trabalhar a nível de um dos seus ramos é importante indicar a substituição do ponto na função principal e, só depois disso, trabalhar a nível de um dos seus ramos. Para além disso, na substituição do ponto 1 comete um erro aritmético, obtendo a imagem 3 em vez da imagem 4 que seria o correto. Na alínea b) do mesmo exercício, ao associar $x = 1$ ao segundo ramo, erra na apresentação do domínio da função. Nota-se que a aluna tem alguma capacidade de síntese nas suas resoluções, mas é preciso não confundir a síntese própria de quem trabalha a nível de objeto com falta de rigor na apresentação da resolução. Portanto podemos considerar que apresenta um conceito de nível incipiente.

Resposta à questão 4 (Figura 0.23).

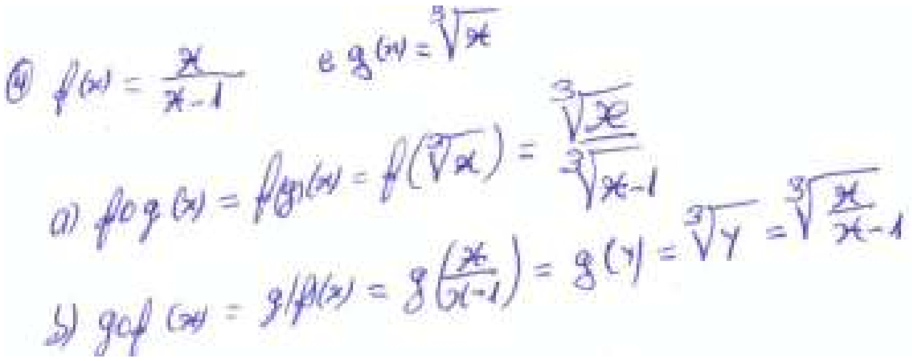


Figura 0.23 Resposta à questão 4 (Ana)

> Entrevistador: Em relação às questões 4, 5 e 6, quer dizer alguma coisa?
>
> Ana: Na quatro pusemos uma função dentro da outra. Na 5 e na 6 apresentámos os resultados.
>
> Entrevistador: Chegou aos resultados de maneira muito sintética nas questões 5 e 6. Pode explicar como lá chegou?
>
> Ana: Na questão 5, primeiro usei a função $g(x) = \cos x$, depois usei a função $f(x)$ que é o gráfico. Na 6 usei a tabela e, dependendo do caso, usei primeiro uma função e depois a outra.

A aluna resolve a questão 4 (Figura 0.23), sobre a composição das funções $f(x) = \frac{x}{x-1}$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $f \circ g$ e $g \circ f$, corretamente. Mostra conhecer os símbolos e sabe utilizar as relações existentes entre os mesmos, o que lhe permite chegar ao resultado final correto de maneira correta. A aluna mostra capacidade de coordenar a dependência de uma variável noutra, o que é um sinal da ação mental 1 (coordenar a dependência de uma variável noutra variável) de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), bem como de interiorização de um processo.

Resposta à questão 5 (Figura 0.24).

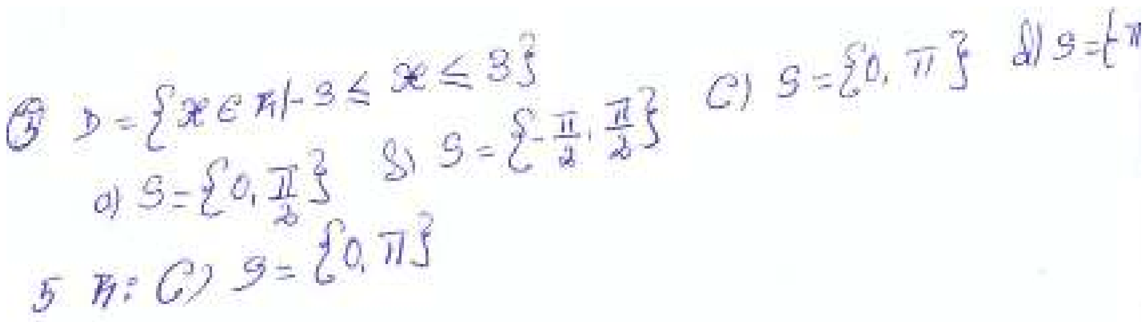


Figura 0.24 Resposta à questão 5 (Ana)

Na resposta à questão 5 (Figura 0.24), embora não tenha apresentado os passos pelos quais passa para chegar ao resultado, a aluna chega ao resultado correto. Volta a ser pouco rigorosa na apresentação da resolução, mas mantém evidente o domínio que tem de composição de funções. Este é um sinal de bom desempenho algébrico.

Resposta à questão 6 (Figura 0.25).

Figura 0.25 Resposta à questão 6 (Ana)

Na resolução da questão 6 (Figura 0.25), em todas as alíneas a aluna encontra o resultado correto. Pode-se notar, na entrevista, que não é fruto do acaso. Mais uma vez fica evidente o domínio que a aluna tem da composição de funções. É um conceito de que ela tem domínio mesmo apresentado sob diversas perspetivas: algébrica, gráfica, numérica ou descritiva.

A Ana é uma aluna de rendimento médio. A nível algébrico, trabalha bem com as funções. Sintetiza passos de procedimentos, o que permite a ela chegar aos resultados que procura em pouco tempo. Revela-se firme, serena e com uma cadência regular nas suas resoluções, denotando familiarização com o que se depara e com o que faz. A nível da representação numérica, o quadro repete-se, consegue identificar o domínio, o contradomínio e, às vezes, até arrisca com sucesso em dizer a lei que permitia transformar elementos do domínio em elementos do contradomínio da função. A nível da representação gráfica, no exercício 5, consegue identificar domínio, contradomínio, zeros, entre outros elementos. No que diz respeito ao conceito que tem de função, bem como à capacidade de descrição, no início teve dificuldades assinaláveis, referindo-se a função apenas como a relação entre dois conjuntos A e B, mas, à medida que foi resolvendo outros exercícios, por via de exemplos reconheceu e indicou outros elementos do conceito de função.

Em relação à distinção que Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), (Tabela 8), fazem de visão de ação e de visão de processo, constatamos que a Ana está mais inclinada para a visão de processo. Consegue trabalhar com função sem a forma analítica, sem uma fórmula, reconhecendo ser um processo de entrada e de saída de elementos de um conjunto para elementos de outro. Embora não dando muitos detalhes, tanto na resolução como na entrevista, nas questões 5 e 6 (Figura 0.24 e Figura 0.25), revela capacidade de reversão do processo que associa valores do domínio a valores do contradomínio de uma função, bem como capacidade de combinar e coordenar processos de entrada e saída de valores na composição de funções. No que diz respeito à covariação, conforme abordada por Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), (Tabela 9), podemos constatar na aluna a ação mental 1, pois usa a relação de dependência entre as variáveis.

3.1.1.5 Armindo

Resposta à questão 1 (Figura 0.26).

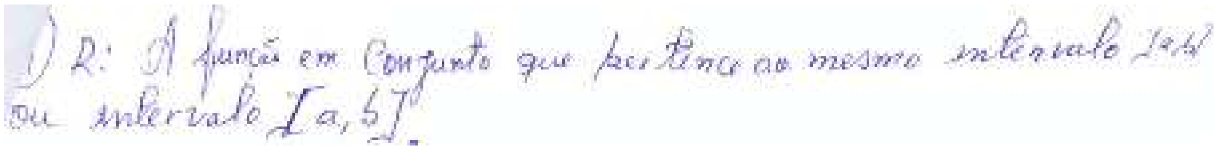
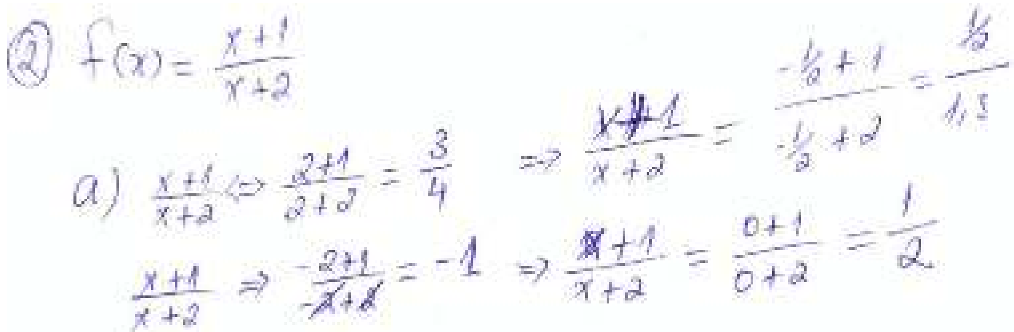

1) R: A funçã em Conjunto que pertence ao mesmo intervalo [a,b] ou intervalo [a,b].

Figura 0.26 Resposta à questão 1 (Armindo)

O aluno apresenta um conceito de função confuso, o qual fica difícil relacionar com a definição de função. Na entrevista não acrescentou elementos novos, mantendo, assim, o conceito apresentado no questionário, em que só faz menção a um intervalo. Podemos concluir que há necessidade de se melhorar o conceito que tem de função que revela ser incipiente.

Resposta à alínea a) da questão 2 (Figura 0.27).


② $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

a) $\frac{x+1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{2}+2} = \frac{\frac{1}{2}}{1,5}$

$\frac{x+1}{x+2} \Rightarrow \frac{-2+1}{-2+2} = -1 \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$

Figura 0.27 Resposta à alínea a) da questão 2 (Armindo)

Na resposta à alínea a) da questão 2 (Figura 0.27), notamos falta de rigor na forma como o aluno apresenta a sua resolução. Em nenhum momento escreve $f(2)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(-2)$ ou $f(0)$, não deixando, assim, claro o objeto que está a ser usado para calcular a sua imagem. Os símbolos de equivalência e de implicação — " $\Leftrightarrow$ " e " $\Rightarrow$ ", respetivamente — são usados de uma maneira completamente aleatória e desprovida de sentido. Isto mostra falta de domínio dos símbolos matemáticos, o que por si só constitui um obstáculo na compreensão de vários conceitos matemáticos. Ainda assim e com alguma atenção, pode-se notar as substituições feitas dos objetos 2, $-\frac{1}{2}$, -2 e 0 para o cálculo das suas imagens. Em relação ao objeto 2, a substituição foi correta, em relação ao objeto $-\frac{1}{2}$, o aluno não apresenta a fração resultante na forma padrão, embora esteja certo. Em relação ao objeto -2, o aluno apresenta $-\frac{1}{0} = -1$, revelando um problema com a divisibilidade por 0. Em relação ao objeto 0, o resultado está correto. O aluno manifesta um desempenho aritmético razoável quando estão envolvidos cálculos aritméticos simples. Em situações mais complexas esse desempenho perde-se completamente.

Resposta à alínea b) da questão 2 (Figura 0.28).

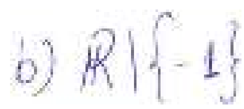

b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Figura 0.28 Resposta à alínea b) da questão 2 (Armindo)

Entrevistador: Tem alguma coisa a acrescentar à resolução que apresenta?

Armindo: [silêncio]

Entrevistador: Por que razão exclui o -1 do domínio?

Armindo: Porque anula o denominador.

Entrevistador: Qual é o denominador?

Armindo: O denominador é… $x + 2$. OK, estou a ver.

Neste caso nota-se que o aluno tem noção do que há por fazer: considerar como domínio todos os números reais, excluindo o que anula o denominador. Mas falta a concretização do procedimento. A apresentação dos passos da resolução facilitaria a análise. Na entrevista o mesmo mostra ter confundido o denominador com o numerador, evidenciando assim a falta de compreensão na operacionalização do contradomínio.

Resposta à questão 3 (Figura 0.29).

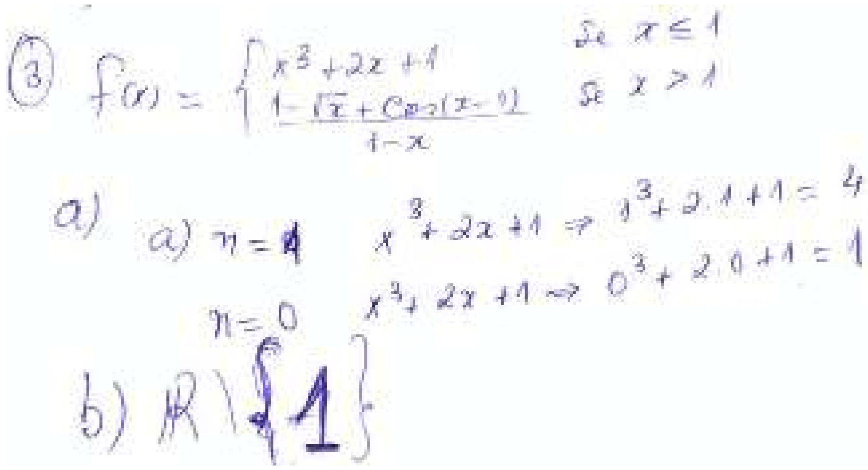


Figura 0.29 Resposta à questão 3 (Armindo)

Na resposta à questão 3 (Figura 0.29), na alínea a), o aluno volta a apresentar falta de rigor. Apresenta um resultado correto, mas falta-lhe rigor na apresentação dos passos que o levam ao resultado. A determinada altura o x mais parece um n, situação que facilmente confunde o observador menos experirente. A função é definida por dois ramos, antes de se trabalhar a nível de um dos seus ramos é importante indicar a substituição do objeto na função principal e, só depois disso, trabalhar a nível de um dos seus ramos. Na alínea b) do mesmo exercício não acerta no resultado nem apresenta a resolução que o terá levado a tal resultado. Infere-se que fez uma resolução padrão do domínio das funções racionais, ignorando que $1 \notin]1, +\infty[$. Este procedimento indicia mecanização no lugar de compreensão.

Resposta à questão 4 (Figura 0.30).

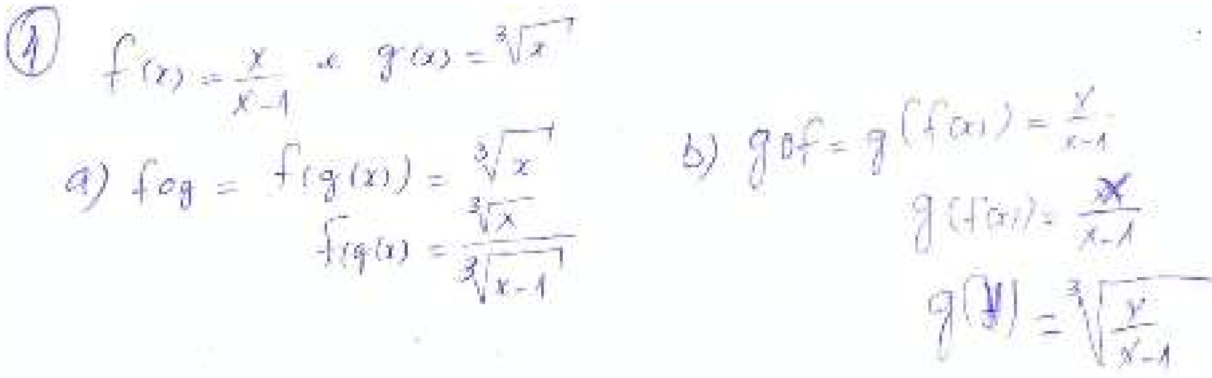


Figura 0.30 Resposta à questão 4 (Armindo)

Entrevistador: Pode explicar o que fez nas questões 4, 5 e 6?

Armindo: Na 4 fizemos a composta de x pela outra função, $g(x)$ na alínea a) e $f(x)$ na alínea b).

Entrevistador: O que tem a dizer sobre as igualdades [o entrevistador indicou as igualdades $f(g(x)) = \sqrt[3]{x}\ e\ g(f(x)) = \frac{x}{x-1}$]?

Armindo: É onde vamos substituir $g(x) = \frac{x}{x-1}$ e a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Entrevistador: OK. Como resolveu a 5?

Armindo: Primeiro pela função trigonométrica, depois pela função gráfica.

Entrevistador: E a 6?

Armindo: Primeiro uma função, depois a outra. Às vezes a primeira é $f(x)$ outras vezes a primeira é $g(x)$.

Neste caso o resultado final da alínea b) está correto, já o da alínea a), no fim, apresenta o denominador $\sqrt[3]{x-1}$ em vez de $\sqrt[3]{x} - 1$. Os passos dados para chegar aos resultados revelam alguma mecanização e inconsistência do que se fazia, o que se confirma na entrevista e nas duas igualdades seguintes: $f(g(x)) = \sqrt[3]{x}$ e $g(f(x)) = \frac{x}{x-1}$. Há aqui uma clara confusão entre os símbolos e o que eles representam. O aluno tem problema de representação da função composta, faz em duas etapas, no entanto, a primeira não é representada corretamente. Conhece o procedimento, mas tem dificuldades na sua aplicação. Parece ter memorizado — e não compreendido — um conjunto de procedimentos que não consegue apresentar com um bom desempenho.

Resposta à questão 5 (Figura 0.31).

Figura 0.31 Resposta à questão 5 (Armindo)

Na resposta à questão 5 (Figura 0.31), o resultado apresentado está correto. A explicação apresentada pelo aluno durante a entrevista não é adequadamente sustentada, pois justifica a sua resposta dizendo que funções usa, sem dizer como.

Resposta à questão 6 (Figura 0.32).

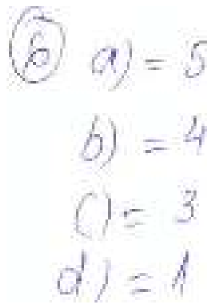


Figura 0.32 Resposta à questão 6 (Armindo)

Na resposta à questão 6 (Figura 0.32), repete-se o cenário da resposta à questão anterior no sentido em que o aluno apresenta diretamente o resultado sem apresentar passos intermédios. O aluno explica a sequência de composição da função, dizendo, por exemplo na alínea a) $f(g(1))$, “primeiro analiso na linha do x, depois analiso na linha do $g(x)$ e, no fim, na linha do $f(x)$”, referindo-se às linhas da tabela da questão 6.

O Armindo é um aluno de nível de aproveitamento escolar fraco. No que toca à representação algébrica tem a capacidade de reduzir alguns passos no papel, fazendo-os mentalmente. Fá-lo com mais segurança do que hesitação, não é tão regular nos seus avanços. Nalguns instantes faz curtas paragens para melhor analisar o que faz, dentre os processos mentais que mostra ter interiorizado, parece estar a aprimorar mais alguns para enriquecer o seu leque de processos. No que diz respeito à representação numérica, diferentemente do que acontece no trabalho com a representação algébrica, precisa de mais tempo para reconhecer o que se lhe apresenta e para identificar o que concretamente precisa de fazer para executar uma tarefa. Feito o reconhecimento, com ou sem ajuda, trabalha ao nível de ação sem quaisquer problemas. No que toca à representação gráfica, mostra um desempenho semelhante ao que tem na representação numérica. Precisa de um impulso ou de algum tempo para reconhecer o que se lhe apresenta e o que se lhe pede. Vencida esta etapa, consegue caminhar a nível de ação por si só. Em relação ao conceito que tem e à capacidade de descrição do que faz, não consegue apresentar o conceito de função de maneira clara.

Constatamos no aluno dificuldades identificadas por Tall (1992) na aprendizagem do Cálculo, nomeadamente uma imagem mental de função restrita, dificuldades em manipulação algébrica, bem como preferência por métodos procedimentais no lugar de compreensão concetual. À luz da distinção entre visão de ação e de processo defendida por Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), (Tabela 8), poder-se-ia dizer que o aluno tem um desempenho independente da expressão analítica que representa a função. Acontece que, apesar de ser um facto que nalgumas vezes o aluno trabalha sem fórmula da função, o aluno não consegue explicar com clareza suficiente o procedimento utilizado. Algebricamente o aluno tem dificuldades em fazer a compositção de funções e não é suficientemente claro quanto aos dois processos envolvidos, entrada e saída.

3.1.1.6 Edson

Resposta à questão 1 (Figura 0.33).

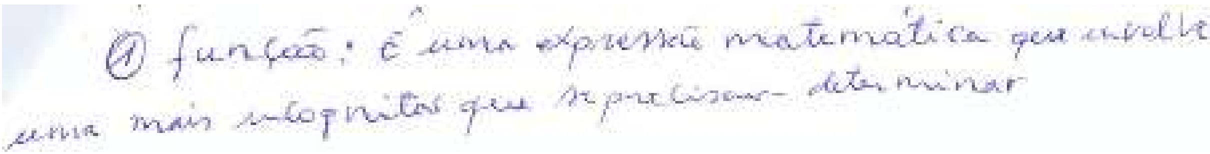

① função: É uma expressão matemática que envolve uma mais incógnitas que se precisa determinar

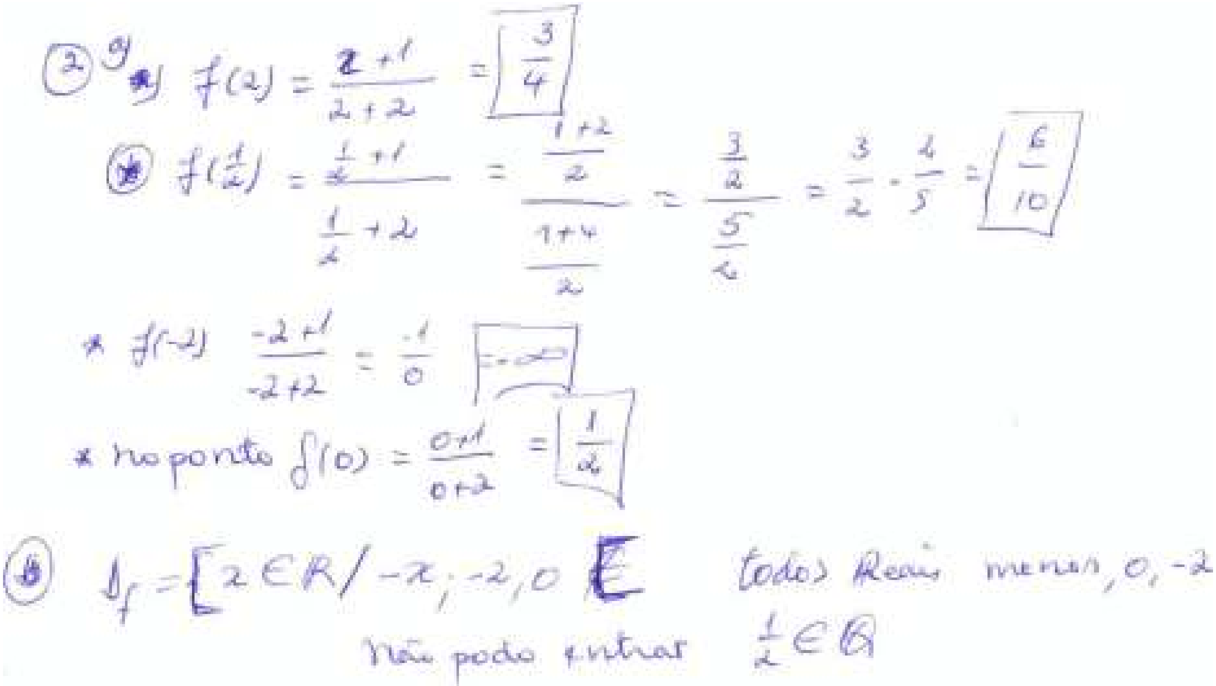
Figura 0.33 Resposta a questão 1 (Edson)

Entrevistador: Quer acrescentar algo à resposta da primeira questão?

Edson: É uma expressão matemática que envolve uma ou mais incógnitas que se precisa de determinar. Primeiro determina-se x e depois determina-se y.

O aluno apresenta uma resposta (Figura 0.33) desarticulada e com ideias incompletas. Durante a entrevista pôde-se perceber melhor o que queria dizer. Faltou-lhe utilizar linguagem adequada para expressar as suas ideias. Notamos problemas com o conceito de variável, conforme abordado por Trigueros & Usini (2003). O aluno considera as variáveis da função como incógnicas, quando o correto é considerá-las como variáveis relacionadas. O aluno apresenta dificuldades na ação mental 1, pois não faz menção à relação de dependência entre as variáveis da função, nem faz menção à correspondência e à sua univocidade entre as variáveis.

Resposta à questão 2 (Figura 0.34).


② a) $f(2) = \frac{2+1}{2+2} = \boxed{\frac{3}{4}}$

b) $f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+2} = \frac{\frac{1+2}{2}}{\frac{1+4}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} = \boxed{\frac{6}{10}}$

* $f(-2)$ $\frac{-2+1}{-2+2} = \frac{-1}{0}$ $\boxed{= -\infty}$

* no ponto $f(0) = \frac{0+1}{0+2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

ⓑ $D_f = \{x \in R / -x; -2, 0\}$ todos Reais menos, 0, -2

Não podo entrar $\frac{1}{2} \in Q$

Figura 0.34 Resposta à questão 2 (Edson)

Em relação à alínea a), o aluno apresenta uma resolução coerente. No entanto, confunde o ponto de abscissa $x = -\frac{1}{2}$, com o ponto $x = \frac{1}{2}$, o que certamente dá lugar a um resultado diferente do esperado. Ao calcular a imagem de $x = -2$, conclui que $-\frac{1}{0} = -\infty$, confundindo o zero do denominador com quantidades que tendem a 0. Apresenta confusão de conceitos, o que tem sido frequente nos alunos a partir do momento em que começam a lidar com o conceito de limite de função.

Em relação à alínea b) (Figura 0.34), apresenta problemas complexos na simbologia. A resolução que apresenta expõe claramente tais problemas. Apresenta o domínio misturando elementos da representação intervalar com elementos da representação de conjuntos. O aluno não domina nem a representação simbólica nem o conceito.

Resposta à questão 3 (Figura 0.35).

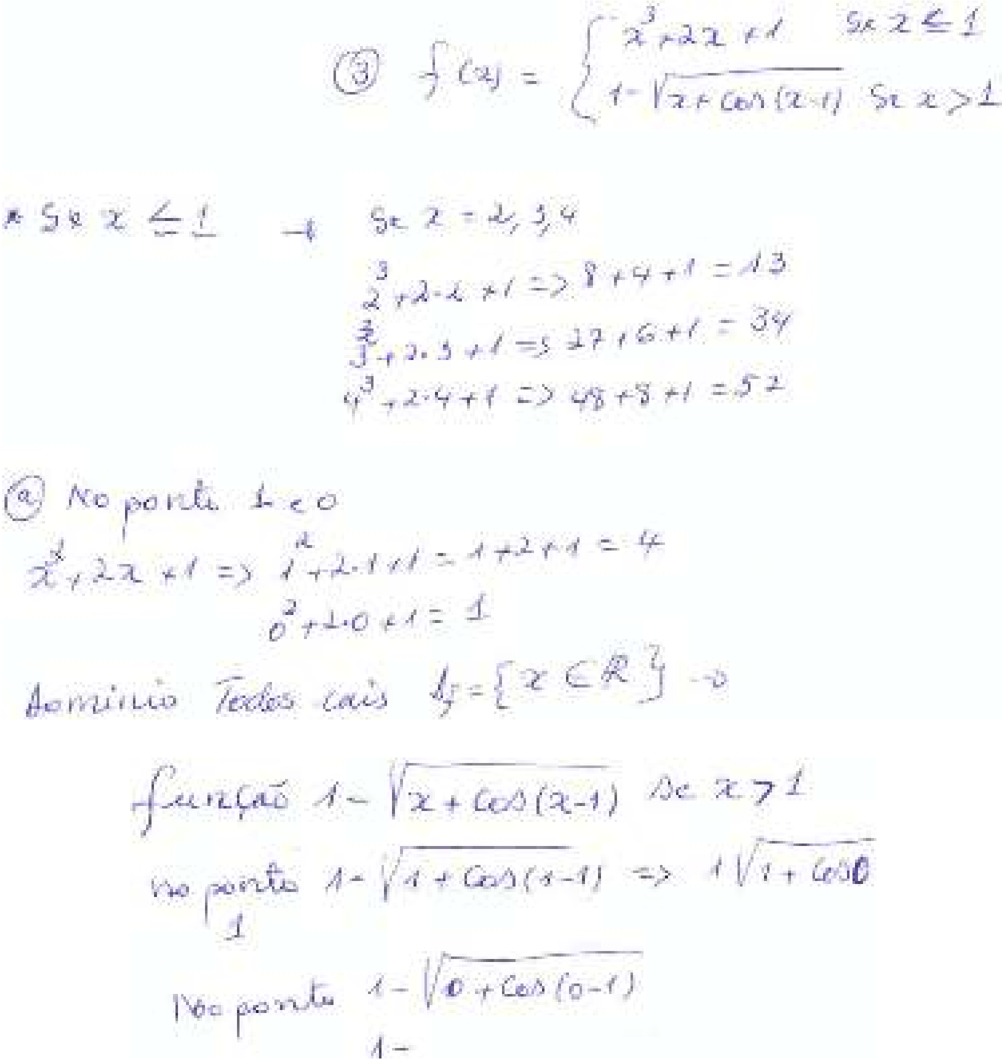


Figura 0.35 Resposta à questão 3 (Edson)

O aluno copia mal o exercício (Figura 0.35). Apresenta uma resolução sobre algo fora do que lhe é apresentado. Apesar disso, a resolução que apresenta mostra compreensão de funções apresentadas em ramos, pois, do exercício considerado em diante a resolução está correta. O aluno tem um desempenho razoável a nível aritmético, em casos simples, mas revela dificuldades em casos mais complexos (dividir por zero) ou interpretar partes do domínio representadas simbolicamente (por exemplo $x \leq 1$, onde considera como elementos 2, 3 e 4).

Resposta à questão 4 (Figura 0.36).

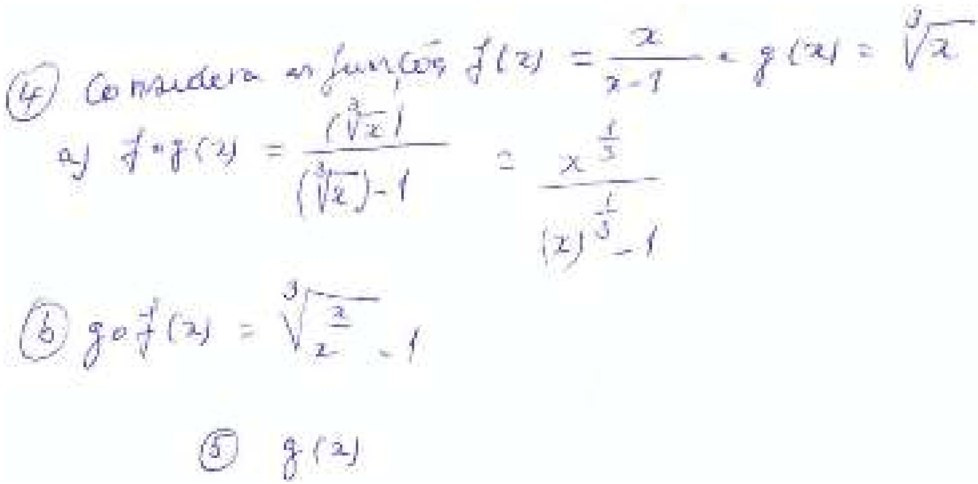


Figura 0.36 Resposta à questão 4 (Edson)

Nesta questão (Figura 0.36) o aluno apresenta uma resolução correta na alínea a) e incorreta (por falta de rigor na escrita) na alínea b). Falta-lhe rigor nas expressões que representam a composição de funções — $f \circ g(x)$ e $g \circ f(x)$ —, bem como no resultado final da alínea b). O procedimento de composição de funções não está muito bem interiorizado, o que se nota na alínea b) por ser inconclusiva.

Resposta à questão 5. Esta ficou sem resposta tanto no questionário como na entrevista. O aluno não tem interiorizado o procedimento algébrico para fazer a composição de funções. Nesta questão as funções envolvidas são dadas na forma analítica e na forma gráfica, tornando a composição mais difícil daí a falta de resposta do aluno. O aluno tem dificuldades em identificar o domínio e o contradomínio, bem como a relação de dependência entre as variáveis independente e dependente, de uma função dada na forma gráfica e, consequentemente, em relacionar com uma função dada algebricamente numa operação de composição.

Resposta à questão 6 (Figura 0.37).

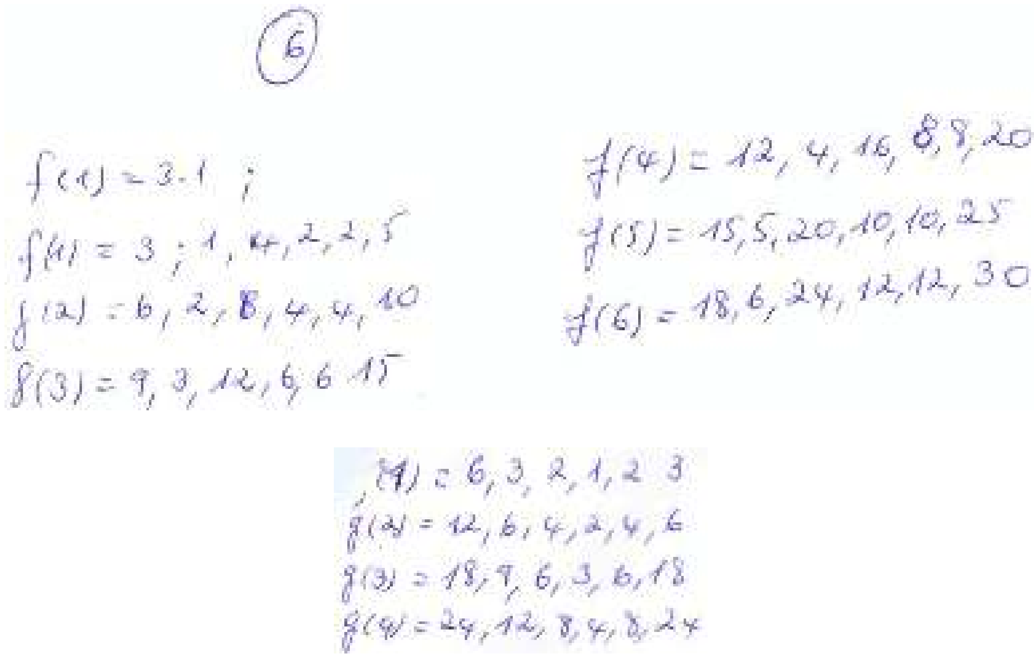


Figura 0.37 Resposta à questão 6 (Edson)

Nesta questão (Figura 0.37), a resolução mais parece uma tentativa desesperada de resolver o desconhecido com base em conhecimentos anteriores. Infelizmente não bem-sucedida nem muito clara. O aluno multiplica todos os elementos do contradomínio da função pelo valor considerado de x, é o caso de $f(1) = 3 \times 1; 1 \times 1; 4 \times 1; 2 \times 1; 2 \times 1; 5 \times 1$ e de $f(2) = 3 \times 2; 1 \times 2; 4 \times 2; 2 \times 2; 2 \times 2; 5 \times 2$, o que não está correto. Isto mostra que ele não domina mesmo a composição — esta ideia é reforçada pela não resolução da questão 5. Nota-se que domina apenas alguns aspetos técnicos que correspondem à substituição direta em casos simples, mas, quando o grau de dificuldade aumenta, descapsular e voltar a capsular considerando outros elementos é uma dificuldade.

O Edson, embora muito preocupado em melhorar, é um aluno de aproveitamento escolar fraco, com a manipulação de alguns conceitos de modo incipiente mas com boas possibilidades de melhorar o seu nível de rendimento. Mostra muita força de vontade e está em ascenção. Parece ter despertado há algum tempo e estar motivado para enfrentar o agradável desafio de aprender mais e melhor. No que diz respeito à representação algébrica, consegue reconhecer o que se lhe apresenta e o que se lhe pede. Facilmente consegue omitir alguns passos, sendo que outros carecem de um tratamento minucioso, o que quer dizer que, apesar dos seus esforços, ainda tem uma quantidade considerável de processos por interiorizar. Em relação à representação numérica, tem um desempenho aceitável e, com mais alguma aprendizagem, em pouco tempo pode deixar de lidar com as funções ao nível de ação e passar a lidar com as mesmas ao nível de processo. Em relação à representação gráfica, precisa que se lhe assegure o nível de partida no que toca a conceitos elementares do sistema de coordenadas cartesianas e a alguns enquadramentos sobre funções. Depois disso consegue seguir em frente ao nível de ação sem grandes dificuldades. No que diz respeito ao conceito que tem, bem como à capacidade de descrição do que faz, apresenta o conceito de função de maneira incompleta.

O aluno tem dificuldades com o conceito de variáveis, conforme classificada por Trigueros & Usini (2003), olha para funções como se de equações se tratassem, considerando as suas variáveis como incógnitas em vez de variáveis relacionadas. Das dificuldades classificadas por Tall (1992) na aprendizagem do Cálculo, constatámos uma imagem mental de função restrita, dificuldades em manipulação algébrica, bem como preferência por métodos procedimentais no lugar de compreensão concetual.

3.1.1.7 Eduardo

Resposta à questão 1 (Figura 0.38).

Figura 0.38 Resposta à questão 1 (Eduardo)

O aluno tenta, de forma simbólica, apresentar a definição de função (Figura 0.38), mas muito fica por se ilustrar. Ao lhe apresentar a definição simbólica de função reconhece vagamente muitos dos elementos da definição, como domínio, contradomínio, assim como variáveis independente e dependente. Constatamos que tem uma imagem concetual de função fraca. O aluno não revela desenvolvimento da ação mental 1 de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), pois não faz menção à relação de dependência entre as variáveis dependente e independente da função, o que revela um raciocínio covariacional fraco. O aluno revela imagem mental restrita de função, conforme a descrição de Tall (1992). Portanto, o nível de compreensão do conceito de função é incipiente.

Resposta à questão 2 (Figura 0.39).

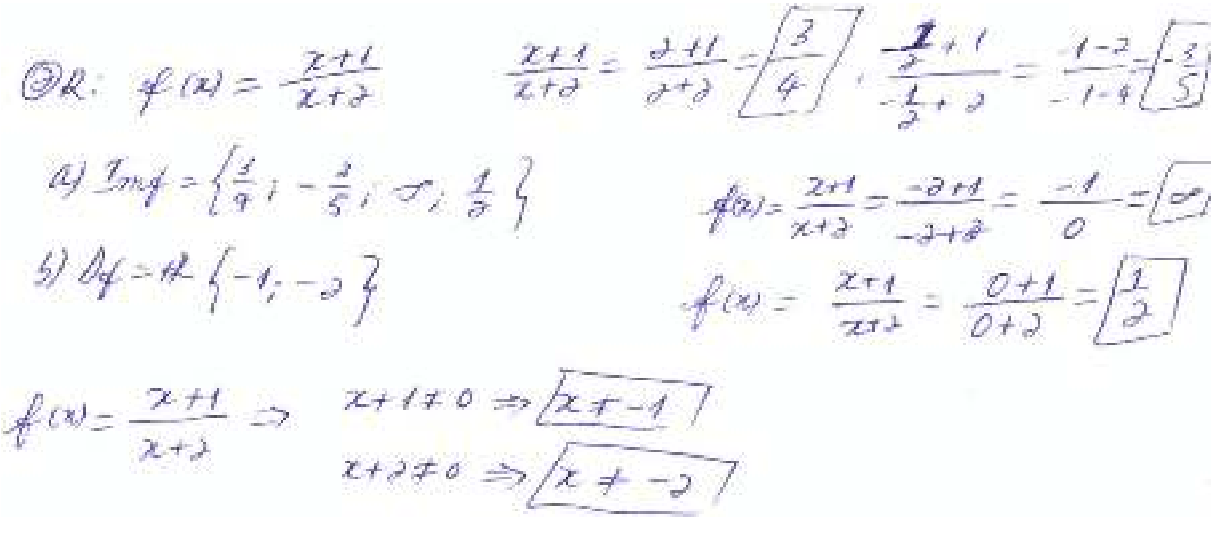


Figura 0.39 Resposta à questão 2 (Eduardo)

O aluno apresenta muitas debilidades na resolução (Figura 0.39), debilidades em termos operatórios e em termos de conceitos. Carece de um trabalho muito profundo para superação das debilidades apresentadas. Na alínea a) substitui objetos sem fazer a indicação adequada, por exemplo $f(x) = \frac{x+1}{x+2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$ em vez de $f(0) = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$, considera $\frac{-1}{0} = \infty$ em vez de $\frac{-1}{0} \nexists$, confunde alguns objetos do contradomínio com o contradomínio como se nota em $Imf = \left\{\frac{3}{4};\ -\frac{3}{5};\infty;\frac{1}{2}\right\}$. Na alínea b) exclui do domínio tanto o elemento que anula o denominador como o que anula o numerador. Em relação ao elemento que anula o numerador é excusado excluí-lo do domínio. Mostra assim um fraco domínio deste conceito que parece assentar em procedimentos memorizados.

Resposta à questão 3 (Figura 0.40).

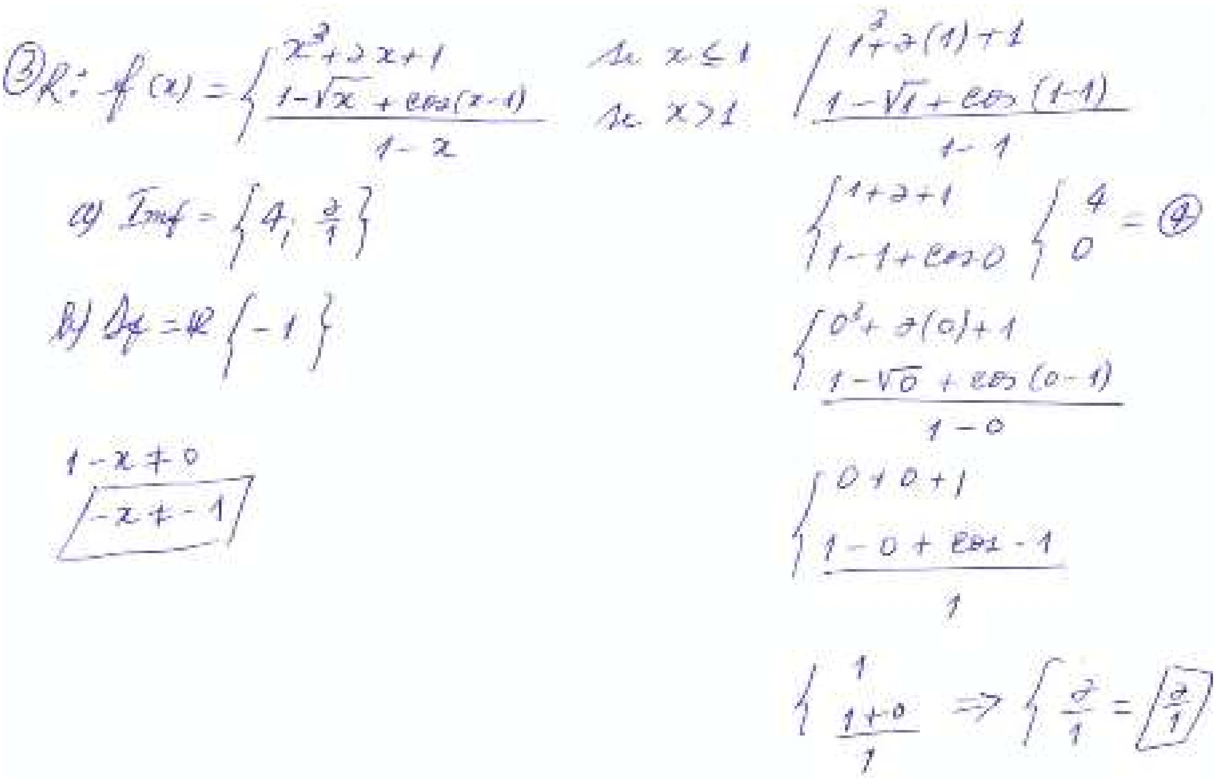


Figura 0.40 Resposta à questão 3 (Eduardo)

O quadro não difere da resolução anterior. O aluno apresenta muitas debilidades na resolução (Figura 0.40), debilidades em termos operatórios e em termos de conceitos. Carece de um trabalho muito profundo para superação das debilidades apresentadas. Confunde alguns objetos do contradomínio com o contradomínio da função, o que se nota em $Imf = \left\{4;\ \frac{2}{1}\right\}$. Em relação à alínea b), onde se pede o domínio da função, revela mais capacidade procedimental do que concetual, pois o objeto $x = 1$ pertence ao primeiro ramo da função e não ao segundo, não sendo, assim, analisável no segundo ramo. Deste modo, o domínio $D = \mathbb{R}\{-1\}$ (onde certamente pretende escrever $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$) não está correto.

As questões 4, 5 e 6 não foram respondidas tanto no questionário como na entrevista, o que denota que o aluno tem dificuldade na realização da operação de composição de funções, consequência da compreensão incipiente que tem de subconceitos de função, domínio, contradomínio, variável independente, variável dependente.

O Eduardo é um aluno de baixo desempenho, um aluno de aproveitamento escolar fraco com dificuldades de vária ordem, com muitos dos objetivos do Ensino Secundário por alcançar. A sua compreensão do conceito de função é incipiente, tem dificuldades na determinação do domínio, como se pode ver na resolução da questão 2b) (Figura 0.39). Na relação do domínio com o contradomínio, não evidencia a ação mental 1, estabelecendo uma relação de dependência entre as variáveis independente e dependente. Estas dificuldades repercutem-se na composição de funções, daí a não resolução das questões 4, 5 e 6. No que que diz respeito às dificuldades na aprendizagem do Cálculo descritas por Tall (1992) notamos uma imagem mental restrita de função. Notamos também dificuldades na operacionalização das propriedades dos números reais, em particular na confusão em divisão por zero e divisão por quantidades que se aproximam zero. Do ponto de vista da Teoria da Reificação, o aluno encontra-se na fase de interiorização. Do ponto de vista da teoria APOS, a estrutura mental do aluno encontra-se ao nível de ação. O aluno tem um nível de compreensão do conceito de função incipiente.

3.1.1.8 Efigénio

Resposta à questão 1 (Figura 0.41), em que se pergunta o que entende por função.

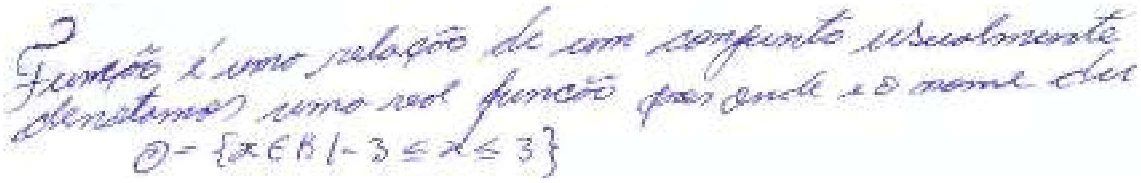


Figura 0.41 Resposta à questão 1 (Efigénio)

O aluno apresenta muitas debilidades na definição, debilidades em termos operatórios e em termos de conceitos. Carece de um trabalho profundo para superação das debilidades apresentadas. Apoiando-se na questão 5 do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3), o aluno apresenta um exemplo de domínio, mostrando ser-lhe mais fácil apresentar um exemplo de domínio do que enquadrar este conceito na definição que apresenta de função, mostrando maior à vontade com representação simbólica do que com a descrição. Apesar do esforço em se apoiar noutra questão para definir função, nota-se que o conceito que tem de função é incipiente.

Resposta à questão 2 (Figura 0.42), em que se pede a imagem da função $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ nos pontos 2, $-\frac{1}{2}$, -2 e 0.

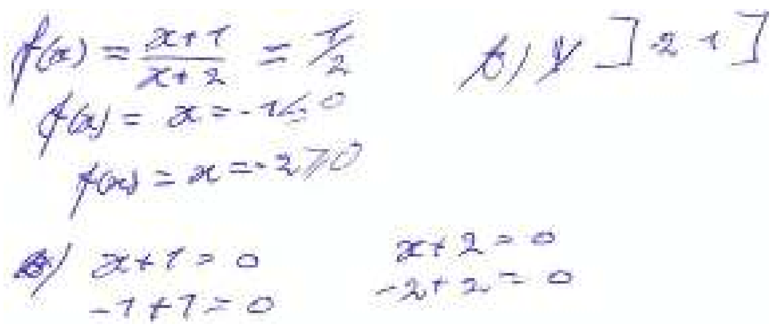


Figura 0.42 Resposta à questão 2 (Efigénio)

Mais uma vez o aluno apresenta muitas debilidades na resolução (Figura 0.42), debilidades em termos operatórios e em termos de conceitos. Na alínea b) mostra dificuldades em determinar o domínio e em representá-lo em intervalos. Carece de um trabalho muito profundo para superação das debilidades apresentadas.

Resposta à questão 3 (Figura 0.43), em que se pede a imagem de $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1 & se\ x \leq 1 \\ \frac{1-\sqrt{x}+\cos(x-1)}{1-x} & se\ x > 1 \end{cases}$, nos pontos 1 e 0.

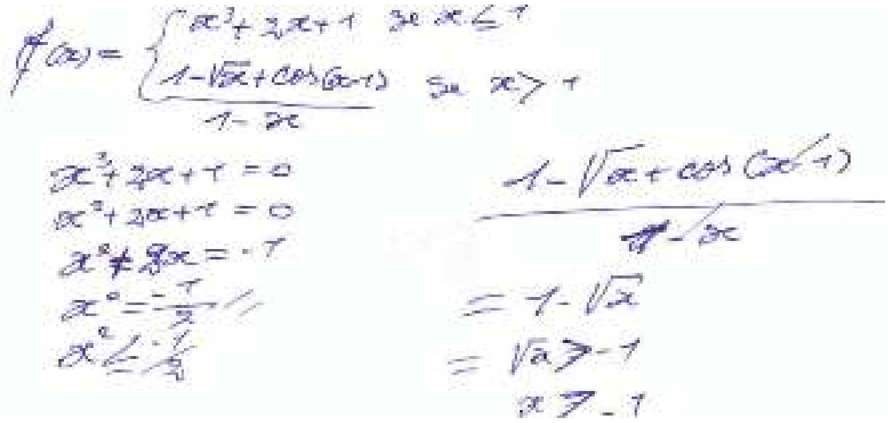


Figura 0.43 Resposta à questão 3 (Efigénio)

O cenário não difere muito do das questões anteriores. Importa assinalar a visão de incógnita que o aluno tem da variável x e apresenta na sua resolução (Figura 0.43). Nota-se que ele tem tendência de determinar o valor de x. O aluno confunde a representação do domínio com a resolução de inequações, privilegiando uma abordagem algébrica em detrimento do conceito de função definida por dois ou mais ramos e da resolução em consequência disso. Mostra ter uma compreensão de nível incipiente.

Resposta à questão 4 (Figura 0.44), sobre a composição das funções, $f(x) = \frac{x}{x-1}$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $f \circ g$ e $g \circ f$.

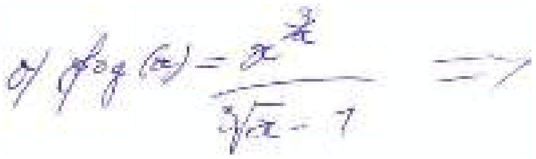


Figura 0.44 Resposta à questão 4 (Efigénio)

O aluno faz a composição $f \circ g$, mas depois não faz a composição $g \circ f$, em entrevista diz que achou que "era desnecessário". A julgar pela resposta que deu na entrevista, inferimos que o aluno considerou a composição de funções como uma operação comutativa, ou seja, na sua visão $f \circ g = g \circ f$, o que só acontece para casos particulares.

O Efigénio é um aluno com um nível de aproveitamento escolar fraco. No que toca à representação algébrica, trata-se de um aluno com manifesta dificuldade de fazer o mais elementar, inclusive o que está ao nível de ação. Em relação à representação numérica de funções, nada apresenta, tanto na resposta ao questionário como na entrevista. No que à representação gráfica diz respeito, o quadro assemelha-se ao da representação numérica. O aluno precisa de trabalho de base para ultrapassar as debilidades que apresenta. No que diz respeito aos conceitos que tem, assim como à capacidade de descrição do que faz, não consegue apresentar o conceito de função de maneira satisfatória, mesmo recorrendo a exemplos.

O aluno não alcança vários objetivos curriculares do ensino da Matemática no Ensino Secundário, a profundidade com que se constata a carateriização de Tall (1992) sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem do Cálculo aponta para isso. Em relação à classificação tripartida feita por Domingos (2003), claro está que o aluno está no nível incipiente. No que diz respeito à Taxonomia de Prontidão do Conceito de Cálculo (PCC) de Carlson, Madison, & West (2015), nas cinco categorias deste instrumento, o aluno apresenta dificuldades de base, deixando claro que não está pronto para a frequência do Cálculo.

3.1.1.9 Elias

Resposta à questão 1 (Figura 0.45), em que se pergunta o que entende por função.

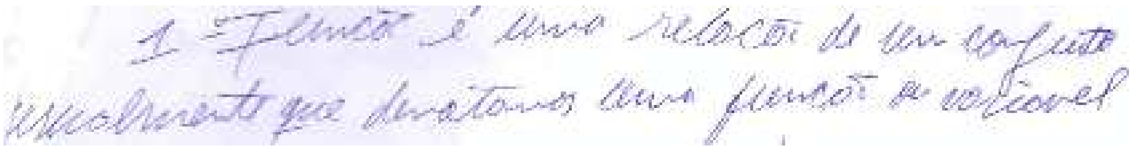


Figura 0.45 Resposta à questão 1 (Elias)

O conceito apresentado é confuso (Figura 0.45): "Função é uma relação de um conjunto usualmente que denotamos uma função ou variável". Na entrevista nada acrescentou à sua resposta. A definição apresentada pelo aluno menciona a relação de um só conjunto e de uma só variável. Portanto, não temos aqui presente a relação entre dois conjuntos, entre o domínio e o contradomínio, nem temos presente a relação de dependência entre duas variáveis. A definição apresentada pelo aluno não apresenta a ação mental 1. Trata-se de uma compreensão incipiente do conceito.

Resposta à questão 2 (Figura 0.46).

Figura 0.46 Resposta à questão 2 (Elias)

Sobre a imagem da função $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ nos objetos 2, $-\frac{1}{2}$, -2 e 0. O aluno apresenta muitas debilidades na resolução (Figura 0.46), debilidades em termos operatórios e em termos de conceitos. Carece de um trabalho profundo para superação das debilidades apresentadas. O aluno calcula imagens da função sem indicar o respetivo objeto do domínio, apresentando uma dificuldade algébrica elementar. Na representação do domínio, $D = \{x \in \mathbb{R}/-1, -2\}$, embora incorreta, percebe-se que a intenção é escrever $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -1 \wedge x \neq -2\}$, ou seja, considerar todos os números reais excluindo $x = -1$ e $x = -2$. O aluno apresenta o domínio excluindo tanto o elemento que anula o denominador como o elemento que elimina o numerador, apresenta um problema de conceito na determinação do domínio.

A questão 3, sobre a imagem de $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1 & se\ x \leq 1 \\ \frac{1-\sqrt{x}+\cos(x-1)}{1-x} & se\ x > 1 \end{cases}$, nos pontos 1 e 0, não foi respondida nem no questionário nem na entrevista, denotando dificuldade no reconhecimento da representação e consequentemente na integração desta no seu conceito de função.

Resposta à questão 4 (Figura 0.47).

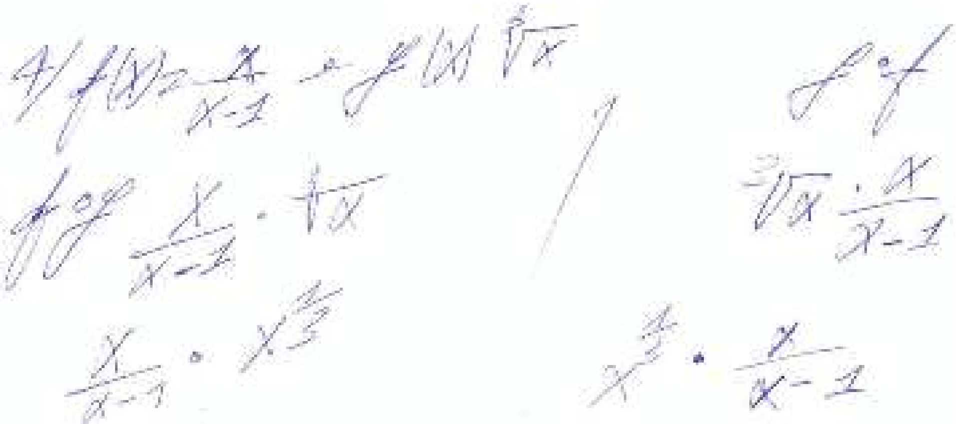


Figura 0.47 Resposta à questão 4 (Elias)

Sobre a composição das funções $f(x) = \frac{x}{x-1}$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$. O aluno, na sua resolução (Figura 0.47), confunde composição de funções com produto de funções, ou seja, considera $f \circ g = f \cdot g$, resultando em $f \cdot g = \frac{x}{x-1} \cdot \sqrt[3]{x}$ em vez de $(f \circ g)(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}$. Além disso, apresenta falta de rigor na sua resolução, por exemplo sem o sinal de igualdade: onde escreve $g(x)\sqrt[3]{x}$ deveria ser $g(x) = \sqrt[3]{x}$; onde escreve $f \circ g \frac{x}{x-1} \cdot \sqrt[3]{x}$ deveria ser $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x-1} \cdot \sqrt[3]{x}$.

Resposta à questão 5, (Figura 0.48).

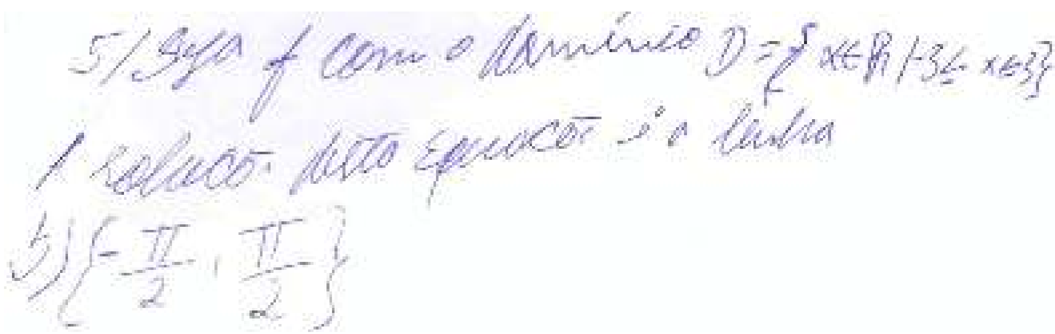


Figura 0.48 Resposta à questão 5 (Elias)

Sobre a composição de uma função trigonométrica com uma representada graficamente, constatamos que o resultado (Figura 0.48) apresentado pelo aluno não está correto. É notória a dificuldade que o aluno tem quanto à composição de funções. Considerando o fraco desempenho que o aluno apresenta na questão 4 e considerando a não resolução da questão 6, ambas sobre composição de funções, considerando ainda as dificuldades que o aluno apresenta na definição de função (questão 1) e na determinação do domínio (questão 2), pode-se inferir que a resposta aqui apresenta não é sustentada por uma resolução.

A questão 6 não é respondida nem no questionário nem entrevista. Nas questões respondidas o quadro foi essencialmente o mesmo. O aluno apresenta muitas debilidades na resolução, debilidades em termos operatórios e em termos de conceitos. Carece de um trabalho profundo para superação das debilidades apresentadas.

O Elias é um aluno de desempenho medíocre. Em relação à representação algébrica, revela um comportamento sequencial explícito com pouca orientação. Manifesta dificuldade de reconhecer os símbolos constantes das expressões com que trabalha, bem como o papel de cada um deles. Em relação à representação numérica nada apresenta, denotando uma perspetiva de função pouco ou nada sustentada na sua estrutura cognintiva. Quanto à composição de função combinando função trigonométrica, apresentada algebricamente, com outra traduzida na sua representação gráfica, o quadro não é diferente. Em relação ao conceito que tem e à capacidade de descrição do que faz, apresenta o conceito de função de maneira desarticulada sem sequer conseguir estabelecer relações plausíveis entre os elementos que fazem parte do conceito. Apesar de mencionar palavras-chave relacionadas com o conceito ao longo do seu discurso, apresenta dificuldades de relacioná-las e concretizá-las nas suas resoluções.

As dificuldades identificadas por Tall (1992) são visíveis com profundidade considerável. Quanto à Taxonomia PCC de Carlson, Madison, & West (2015), nas suas cinco categorias o aluno apresenta debilidades consideráveis. O aluno não estava pronto para a frequência do Cálculo.

3.1.1.10 Emanuela

A aluna não apresenta a resolução de qualquer questão, mas faz algumas verbalizações na entrevista.

> Entrevistador: O que entende por função?
>
> Emanuela: A função tem domínio, contradomínio e imagem. Serve para fazer cálculos.
>
> Entrevistador: Que cálculos?
>
> Emanuela: Serve para fazer cálculos da variável x.

Quando verbaliza os subconceitos, domínio e contradomínio, do conceito de função sem os relacionar, revela indícios da ação mental 1 de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008). Ao se limitar a dizer que “[a função] serve para fazer cálculos da variável x” como se de uma simples fórmula se tratasse sem relacionar a uma imagem, mantém-se no indício e não revela evidência de ocorrência da ação mental 1. Em relação às dificuldades na aprendizagem do Cálculo descritas por Tall (1992), é visível a fraca imagem mental de função revelada pela aluna. Quanto às teorias da Reificação e APOS, a aluna encontra-se na fase de interiorização e no nível de estrutura mental ação, respetivamente. Portanto, a aluna tem um nível de compreensão do conceito de função incipiente.

3.1.1.11 Conclusões sobre o conceito de função

De uma maneira geral, notou-se que os alunos tinham maior compreensão sobre os conceitos do ponto de vista algébrico. Deste ponto de vista, mais facilmente reconheciam os objetos, mais facilmente os manipulavam, mais facilmente os interiorizavam e os assimilavam como processos, mais facilmente construíam e reconstruíam novos objetos matemáticos. Foi importante estudar as respostas dadas às questões relacionadas ao conceito de função, porquanto permitiram-nos ir assinalando as insuficiências que os alunos tinham, o que nos permitiu melhor entender as suas estruturas cognitivas.

A seguir (Tabela 14) apresentamos uma síntese da caraterização descrita acima. É importante dizer que com base nas análises feitas foi possível identificar o nível de preparação dos alunos para a frequência do Cálculo, alguns reúnem requisitos e outros não. À luz da teoria APOS, e no nosso entender, não basta que o aluno suprima etapas de sequências de resolução, é necessário que o faça de maneira natural, de maneira segura, de maneira corrente, é necessário que observe alguns critérios levantados em estudos anteriores como o das ações mentais empreendidas, das taxonomias ACP e PCC, bem como o critério do raciocínio covariacional.

Tabela 14: Estrutura cognitiva associada ao conceito de função

Aluno	Representação algébrica			Representação numérica			Representação gráfica		
	Ação	Processo	Objeto	Ação	Processo	Objeto	Ação	Processo	Objeto
Alexandra	X			X			X		
Amarildo		X		X				X	
Amaro		X			X			X	
Ana		X			X			X	
Armindo		X		X			X		
Edson		X		X			X		
Eduardo	X			X			X		
Efigénio	X			X			X		
Elias	X			X			X		
Emanuela	X			X			X		

Tanto a Teoria da Reificação como a APOS reconhecem a passagem cíclica pelas suas fases como forma de a aprendizagem do aluno ascender na hierarquia da complexidade dos conceitos matemáticos. A quebra de ciclos ou a precariedade da passagem por eles repercute-se nas aprendizagens subsequentes. No caso das funções reais de variável real, conceitos como os de variável, de números reais e suas propriedades, bem como de funções elementares, na estrutura cognitiva de alguns alunos — alunos a nível de ação na Tabela 14 — não atingiram as fases de topo dos ciclos de aprendizagem das teorias APOS — objeto e esquema — e da Reificação — reificação. Esta situação pressupõe rutura de ciclo normal de aprendizagem, o que é recuperável com trabalho extra de superação. Desta maneira, compreende-se as dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução das questões que se prendem com o estudo de funções.

3.1.2 Estrutura cognitiva associada ao conceito de derivação

Nesta secção as questões do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3) consideradas são as seguintes:

7. O que entende por derivação?
8. Derive $f(x) = (x^2 - 4)^3 + 5$.
9. Seja f uma função cuja derivada, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $f'(x) = (4 + x)^2$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

a) O gráfico da função f é côncavo em $\mathbb{R}$.

b) A função f tem um máximo relativo em $x = -4$.

c) O gráfico da função não tem pontos de inflexão.

d) O gráfico da função tem um ponto de inflexão de coordenada $\left(-4, f(-4)\right)$.

10. A quantidade (em quilogramas) de café vendia por uma companhia a uma lanchonete ao preço de p kwanzas por quilograma é dada por $Q = f(p)$.

a) Qual é o significado da derivada $f'(6)$?

b) $f'(6)$ é positivo ou negativo? Justifique.

3.1.2.1 Alexandra

Resposta à questão 7. Esta questão foi deixada em branco no questionário.

> Entrevistador: O que entende por derivada de uma função?
>
> Alexandra: É quando aplicamos regras que transformam a função. Quando é polinómio subtraímos um ao expoente e multiplicamos pelo expoente, quando é fração…

A Alexandra apenas consegue verbalizar partes das regras de derivada, sem mostrar um conhecimento sólido sobre essas mesmas regras — segundo Sfard (1991) (

Tabela 5), trata-se de uma representação interna apoiada por representações verbais, portanto, trata-se de uma conceção operacional; do ponto de vista de Tall (1992) é uma imagem mental restrita de função, quando este conceito é associado ao de derivada, portanto, é uma imagem mental restrita do conceito de derivada de uma função. Esta conclusão é reforçada com a resolução que a aluna apresenta na Figura 0.49, onde, apesar de ela ser capaz de verbalizar a fórmula da derivada da potência na entrevista, na resolução da questão 8 apresenta dificuldades, não chegando ao resultado esperado. A aluna tem uma compreensão incipiente do conceito de derivada de uma função.

Resposta à questão 8 (Figura 0.49).

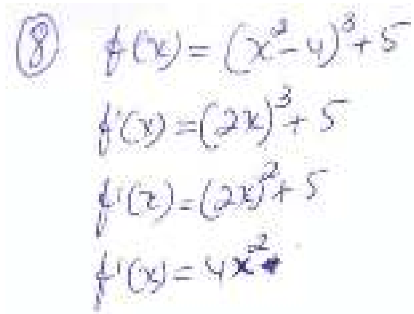


Figura 0.49 Resposta à questão 8 (Alexandra)

Nesta questão (Figura 0.49) nota-se que ela tem ideia do que se trata e das regras e fórmulas que deve aplicar. Apesar disto, não soube aplicar corretamente a regra da cadeia e fez confusão na aplicação da fórmula da potência. Isto é, também, um reflexo do seu desempenho nas questões 5 e 6, onde se trata de funções compostas. Mais uma vez o efeito dominó, para quem não domina funções compostas fica muito difícil aplicar a regra da cadeia. Dito de outra forma, para uma aluna que não interioriza o conceito de função composta de modo a trabalhar a nível de processo ou de objeto, torna-se difícil trabalhar ao nível de ação com a regra da cadeia. O mesmo acontece do ponto de vista da Teoria da Reificação, onde se pode dizer que a aluna não condensou, muito menos reificou, o conceito de função composta.

Resposta à questão 9 (Figura 0.50).

Figura 0.50 Resposta à questão 9 (Alexandra)

Nesta questão (Figura 0.50) apenas a alínea d) estaria correta. Em vez disso, a aluna apresenta as alíneas b) e c) como estando corretas. Não apresenta qualquer cálculo que fundamente a sua escolha, o que nos dá a indicação de ser uma escolha feita ao acaso, um sintoma da falta de compreensão de conceitos elementares associados à questão.

A questão 10 foi deixada em branco no questionário e na entrevista foi dito pela aluna que se trata da “imagem da função derivada no ponto $x = 6$”, manifestando o que Tall (1992) chama de dificuldades em traduzir problemas do mundo real em formulação de cálculo.

A Alexandra é uma aluna com aproveitamento escolar fraco. No que toca à representação algébrica, a aluna tem dificuldades de trabalhar com funções aplicando bem regras e fórmulas de derivada. Em relação à representação numérica, o quadro é de maior dificuldade. A aluna não consegue resolver nenhuma das alíneas da questão 10 e a resposta que dá na entrevista não está correta, a questão revela-se um quadro novo para a aluna. É um conceito muito explorado do ponto de vista algébrico e pouco ou nada explorado do ponto de vista numérico, o que, em nosso entender, contribui para o surgimento de tal vazio. Do ponto de vista da representação gráfica, na questão 7, questão em que poderia abordar a interpretação geométrica do conceito de derivada de uma função, manifesta desconhecimento. Sobre o raciocínio covariacional de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), a aluna apresenta indícios da ação mental 1, pois a verbalização que apresenta na entrevista pressupõe relacionar as variáveis independente e dependente. Não apresenta evidências das ações mentais 2, 3, 4 nem 5. Quanto às dificuldades dos alunos na aprendizagem do Cálculo apresentadas por Tall (1992), a aluna apresenta as seguintes: imagem mental restrita de função; dificuldades em traduzir problemas do mundo real em formulação de cálculo; consequente preferência da aluna por métodos procedimentais, em vez de compreensão concetual. Quanto às teorias da Reificação e APOS, a aluna encontra na fase e estrutura mental inicial de um ciclo de aprendizagem, respetivamente, fase de interiorização e nível de ação. A aluna tem uma compreensão incipiente do conceito de derivada de uma função.

3.1.2.2 Amarildo

Resposta à questão 7 (Figura 0.51). Procura-se apresentar a questão de forma aberta para que os alunos descrevam o máximo possível do que lhes surge na cabeça sobre tal assunto.

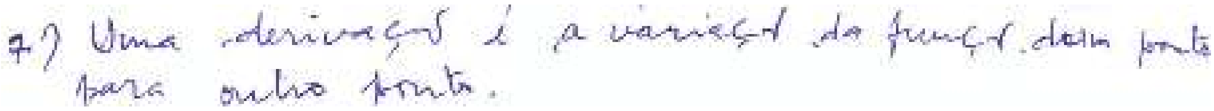
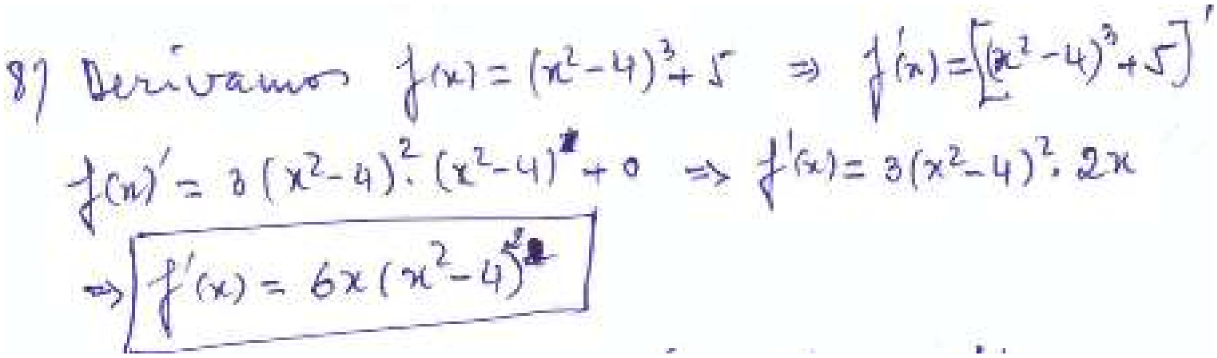

7) Uma derivação é a variação da função dum ponto para outro ponto.

Figura 0.51 Resposta à questão 7 (Amarildo)

> Entrevistador: O que entende por derivada de uma função?
>
> Amarildo: Derivada de uma função é a variação da função.
>
> Entrevistador: Quer acrescentar mais alguma coisa?
>
> Amarildo: É quando a reta secante se transforma na reta tangente.

Na sua resposta (Figura 0.51), o Amarildo procura apresentar a definição de derivada de uma função num ponto, o que não faz com aproximação aceitável, nota-se a presença da ideia de variação, ideia chave para o conceito. A definição que apresenta, reforçada pelas respostas na entrevista, são uma descrição aproximada à interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto. Atendendo ao descrito por Sfard (1991) (Tabela 6), sobre a diferença entre conceção operacional e conceção estrutural, o aluno apresenta uma conceção estrutural. Apesar de não mencionar aspetos algébricos, o seu desempenho nesta perspetiva nas resoluções dos exercícios seguintes é notável. Quanto ao raciocínio covariacional de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), importa referir que, com a descrição que faz na entrevista, o aluno manifesta as ações mentais 1, 2 e 3, bem como manifesta indícios da ação mental 5.

Resposta à questão 8 (Figura 0.52).



8) Derivamos $f(x) = (x^2-4)^3+5 \Rightarrow f'(x) = [(x^2-4)^3+5]'$

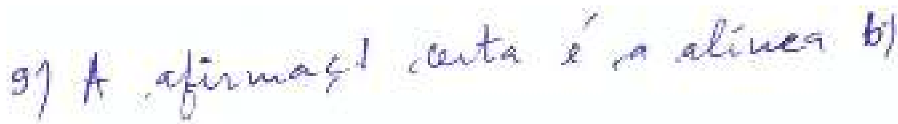
$f(x)' = 3(x^2-4)^2 \cdot (x^2-4)' + 0 \Rightarrow f'(x) = 3(x^2-4)^2 \cdot 2x$

$\Rightarrow \boxed{f'(x) = 6x(x^2-4)^2}$

Figura 0.52 Resposta à questão 8 (Amarildo)

Aqui (Figura 0.52) o aluno apresenta um bom desempenho algébrico, mostrando domínio de funções compostas e da regra da cadeia. O aluno apresenta um bom domínio das técnicas de derivação.

Resposta à questão 9 (Figura 0.53).



9) A afirmaçã certa é a alínea b)

Figura 0.53 Resposta à questão 9 (Amarildo)

> Entrevistador: A sua opção para a resolução da questão 9 foi a alínea b). Pode justificar?
>
> Amarildo: Segui os passos, primeiro calculei a derivada e depois analisei.

Apenas a alínea d) está correta. Com mais passos apresentados pelo aluno teríamos uma melhor percepção do raciocínio que está subjacente à sua resposta. Mas a julgar pelo que o aluno diz na entrevista, faz alguma confusão na interpretação do enunciado do exercício, confundindo a primeira derivada com função dada. Isto é um indício de o aluno estar melhor preparado para resolver exercícios típicos, estando, consequentemente, sujeito a induções para aquilo que lhe é típico. Desta forma, o aluno apresenta a dificuldade descrita por Tall (1992) como preferência por métodos procedimentais, em vez de compreensão concetual. Atendendo ao bom desempenho do aluno na questão 8 (Figura 0.52), é de considerar como sendo mais uma tendência, resultante de hábito cultivado e de desatenção na análise à questão, do que propriamente uma preferência.

Resposta à questão 10 (Figura 0.54).

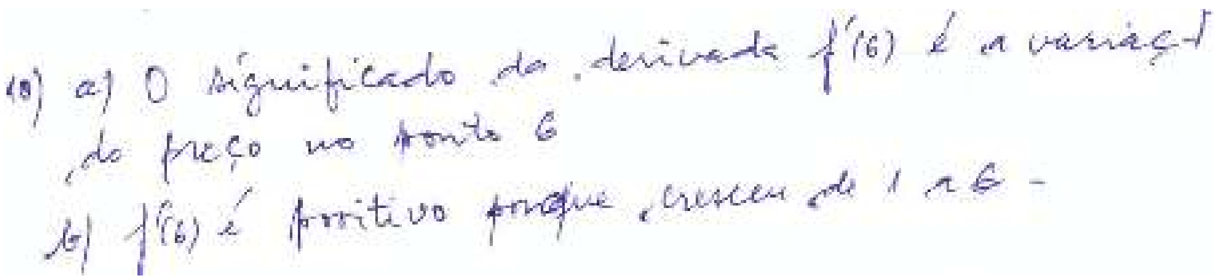

10) a) O significado da derivada $f'(6)$ é a variação do preço no ponto 6
b) $f'(6)$ é positivo porque cresceu de 1 a 6 -

Figura 0.54 Resposta à questão 10 (Amarildo)

Entrevistador: Quer acrescentar algo à resolução que apresentou? Que variável varia em função de outra?

Amarildo: A quantidade em função do preço.

Entrevistador: O que significa $f'(6)$?

Amarildo: É a variação da quantidade no ponto 6.

Entrevistador: Em relação à alínea b), quer dar mais explicações? De onde vem o 1?

Amarildo: O 1 é a quantidade inicial.

Na alínea a) (Figura 0.54), o aluno fala da variação, faltando especificar que $f'(6)$ corresponde à variação da quantidade de café no momento em que o preço do café é de 6,00 KZ, portanto, faltou mencionar o conceito de variação instantânea. Na alínea b), a resposta não está correta faltou-lhe mais interpretação.

Com ajuda da entrevista, notamos que o aluno identifica a relação de dependência entre as variáveis quantidade e preço, bem como a consequência da mudança de uma variável na outra — ações mentais 1 e 2 Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008). Tendo em conta as respostas dadas na entrevista, o aluno mostra raciocínio capaz de relacionar as quantidades de mudança das variáveis — ação mental 3 (idem) —, bem como raciocínio capaz de coordenar a taxa de variação instantânea entre a variável dependente e a independente — ação mental 5 (idem).

O Amarildo é um aluno com bom desempenho no conceito de derivada. Do ponto de vista algébrico, consegue calcular a derivada de uma função sem dificuldades. Do ponto de vista da representação gráfica, considerando a definição que apresenta de derivada de uma função num ponto, bem como as respostas apresentadas na entrevista, o aluno mostra ter capacidade de relacionar conceitos dentro da definição de derivada de uma função. Do ponto de vista da representação numérica, resolve corretamente a alínea a) da questão 10 e, apesar de não resolver corretamente, mostra ter noção do que há por fazer na alínea b), mostra ter noção da necessidade de se entender sobre variação para poder responder à questão. No que diz respeito ao raciocínio covariacional de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), o aluno manifesta as ações mentais 1, 2, 3 e 5. O aluno revela preferência por métodos procedimentais conforme descreve Tall (1992). Em relação à Teoria da Reificação, o aluno revela estar na fase de condensação e, quanto estimulado a raciocinar mais, revela estar na fase da reificação. Em relação à Teoria APOS, o aluno revela estar com uma estrutura mental a nível de processo e, quando estimulado a raciocinar mais, pode alcançar o nível de objeto. O aluno tem uma compreensão instrumental e relacional do conceito de derivada de uma função. A sua compreensão relacional é mais visível quando estimulada, por exemplo em entrevista.

3.1.2.3 Amaro

Resposta à questão 7 (Figura 0.55).

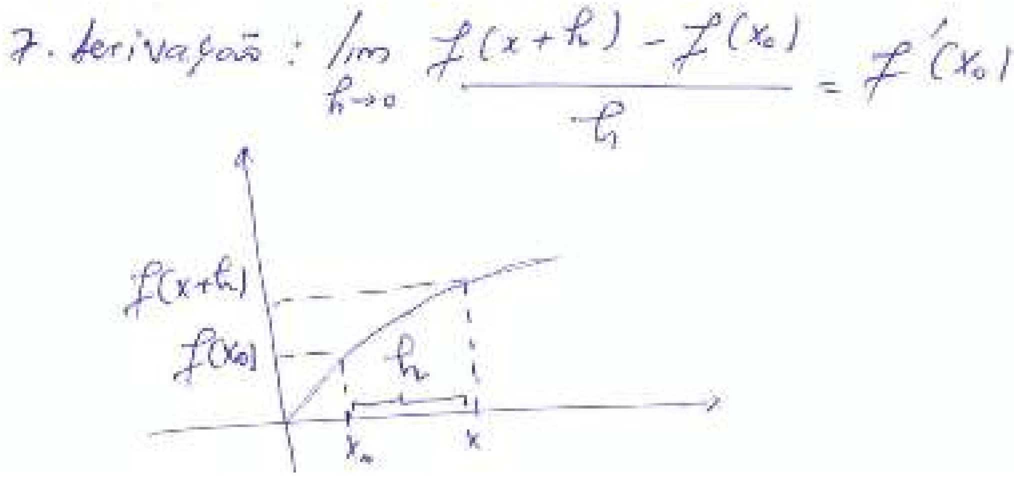


Figura 0.55 Resposta à questão 7 (Amaro)

Apresenta bem o conceito de derivada de uma função num ponto em símbolos (Figura 0.55). Tenta fazer o mesmo graficamente, mas fica por se completar a ideia. Inclui a curva, mas não inclui nem a reta tangente nem a reta secante. Apesar de não incluir as retas tangente e secante, atendendo ao descrito por Sfard (1991) (Tabela 6) sobre a diferença entre conceção operacional e conceção estrutural, podemos considerar que o aluno apresenta as duas conceções, tanto a operacional (limite do quociente incremental) quanto a estrutural (representação gráfica do conceito de derivada de uma função num ponto, embora incompleta). Além disso, a representação gráfica ilustra a coordenação de dependência entre a variável dependente e a independente, constatamos ação mental 1 de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008). A mesma figura ilustra a coordenação da quantidade de mudança da variável dependente com as alterações na independente, constatamos a ação mental 2 (idem). Em entrevista afirmou que a derivada de uma função é “o limite do quociente incremental entre as variáveis dependente e dependente” e afirmou que as respostas, tanto algébrica como gráfica, que deu ao questionário “são representações disso”.

Resposta à questão 8 (Figura 0.56).

$$8.\quad f(x) = (x^2-4)^3 + 5 \qquad y = u + v$$

$$f'(x) = [(x^2-4)^3]' + (5)' \qquad y' = u' + v'$$

$$u^n = (u^n)' = n\,u^{n-1} \cdot u'$$

$$= 3(x^2-4)^{3-1} \cdot 2x + 0$$

$$= 3(x^2-4)^2 \cdot 2x.$$

$$\boxed{f'(x) = 6x(x^2-4)^2}$$

Figura 0.56 Resposta à questão 8 (Amaro)

Aqui (Figura 0.56) o aluno apresenta bom desempenho, mostrando domínio de funções compostas e da regra da cadeia. Deste modo, mostra ter um bom domínio algébrico das regras de derivada, evidenciando a regra geral e aplicando-a ao caso concreto.

Resposta à questão 9 (Figura 0.57).

$$9.\quad f'(x) = (4+x)^2 \Leftrightarrow \int (4+x)^2\,dx.$$

$$t = 4 + x.$$

$$t - 4 = x.$$

$$dt = dx.$$

$$\int t^2\,dt = \frac{t^{2+1}}{2+1} + c.$$

$$= \frac{t^3}{3} + c.$$

$$f(x) = \frac{1}{3}(4+x)^3 \Rightarrow f(x) = \left(\frac{4+x}{3}\right)^3$$

a) o gráfico da função f é concavo em $\mathbb{R}$.

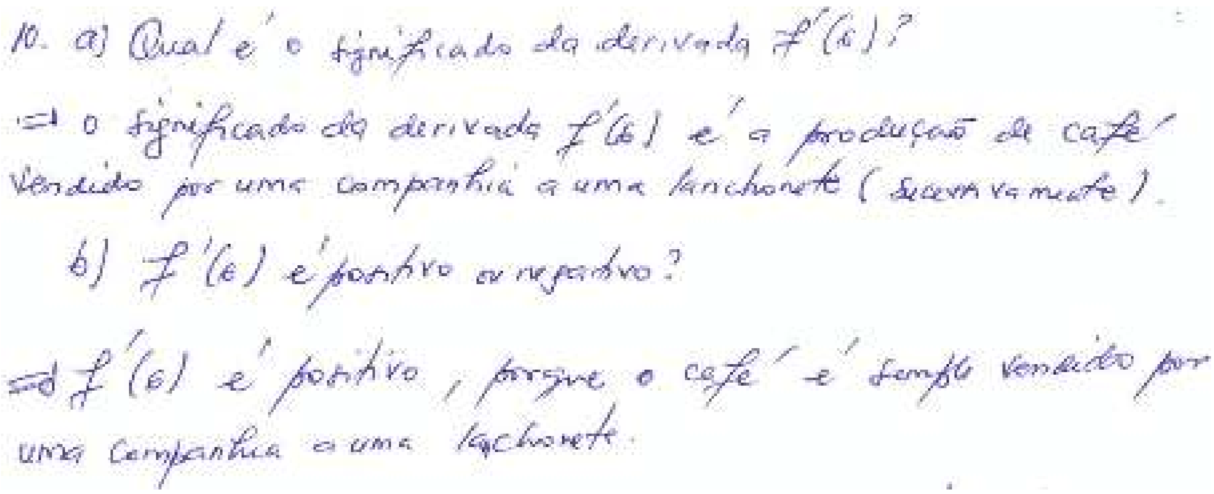
Figura 0.57 Resposta à questão 9 (Amaro)

Entrevistador: Porquê optou pela alínea a)?

Amaro: Segui o procedimento, professor.

Nesta resolução (Figura 0.57), o aluno mostra como reage ao atípico: procurando torná-lo típico. Ou seja, foi dada a primeira derivada da função e a resolução do aluno começa por determinar, por via de integração, a função correspondente à primeira derivada dada. Procedendo desta maneira, o aluno reforça a sua capacidade compreensão, pois passa a ter a função em estudo como mais um elemento de análise. Encontrando a primitiva — repare-se que o aluno omite a constante de integração C e considera apenas $f(x) = \frac{(4+x)^3}{3}$ — correspondente à função em análise, o aluno apresenta a alínea a) como resposta. Nota-se que não dá sequência aos cálculos. Pelo potencial apresentado, se desse sequência, o mais provável é que chegaria ao resultado esperado. No entanto, na entrevista, o aluno afirma que "seguiu o procedimento", o que nos remete a um possível raciocínio não exteriorizado, uma tentativa de executar o procedimento mentalmente. Por falha o aluno não chega ao resultado esperado, entretanto, neste caso, há evidências de compreensão relacional, ou seja, o aluno relaciona o Cálculo Integral com este exercício específico de Cálculo Diferencial numa abordagem certamente diferente da que recebeu na sala de aula — não se ensina a integrar ao mesmo tempo que a derivar.

Resposta à questão 10 (Figura 0.58).


10. a) Qual é o significado da derivada $f'(6)$?

⇒ o significado da derivada $f'(6)$ é a produção de café vendido por uma companhia a uma lanchonete (sucessivamente).

b) $f'(6)$ é positivo ou negativo?

⇒ $f'(6)$ é positivo, porque o café é sempre vendido por uma companhia a uma lanchonete.

Figura 0.58 Resposta à questão 10 (Amaro)

Aqui (Figura 0.58), mais uma vez, temos uma questão que se prende com a interpretação. O aluno mostra dificuldades em interpretar o conceito de derivada de uma função na aplicação a uma situação concreta. A entrevista nada acrescentou qualitativamente à resposta do questionário. O aluno, na alínea a), não apresenta corretamente a coordenação da dependência entre as variáveis quantidade e preço, o que representa dificuldades na ação mental 1 de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008). Considerando também a alínea b), nota-se as consequentes dificuldades em apresentar um bom desempenho nas ações mentais 2, 3 e 5 (idem): (2) o aluno não consegue identificar a direção de mudança de uma variável em relação a outra; (3) o aluno não consegue identificar a quantidade de mudança de uma variável em relação a outra; (5) o aluno não consegue interpretar a variação instantânea da variável dependente num ponto da variável independente. O aluno, ao não relacionar corretamente as variáveis preço e café, revela dificuldades em traduzir problemas do mundo real em formulação de Cálculo, conforme descreve Tall (1992).

Em relação à representação algébrica do conceito de derivada, o aluno está ao nível de objeto. O desempenho é caraterizado por naturalidade e segurança. Consegue mentalmente dar passos das sequências de resolução a que está sujeito. Em relação à representação numérica do conceito de derivada, o aluno apresenta um desempenho baixo nas respostas ao questionário, as respostas não estão corretas. Em relação à representação gráfica do conceito de derivada, o aluno apresenta uma representação incompleta, mas no caminho certo. No que diz respeito aos conceitos que tem e à capacidade de descrevê-los, o de derivada é dominado de forma aceitável. Também revela alguma criatividade em situações apresentadas de maneira aparentemente diferente, a resposta à questão 9 (Figura 0.57) é um caso pontual. No que diz respeito ao raciocínio covariacional de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), o aluno revela as ações mentais 1 e 2, embora tivesse dificuldade de voltar a revelá-las na resolução da questão 10. Em relação às dificuldades na aprendizagem do Cálculo descritas por Tall (1992), o aluno tem dificuldades em traduzir problemas do mundo real em formulação de Cálculo. Em relação à Teoria da Reificação essencialmente o aluno encontra-se na fase de condensação, mas com indícios da fase de reificação. Em relação à Teoria APOS, essencialmente o aluno encontra-se a nível de processo com indícios do nível de objeto. O nível de compreensão do conceito de derivada de uma função é instrumental e relacional, sendo interessante destacar que o nível de compreensão relacional nem sempre implicou apresentar o resultado esperado da questão — resolução da questão 9, Figura 0.57.

3.1.2.4 Ana

Resposta à questão 7 (Figura 0.57).

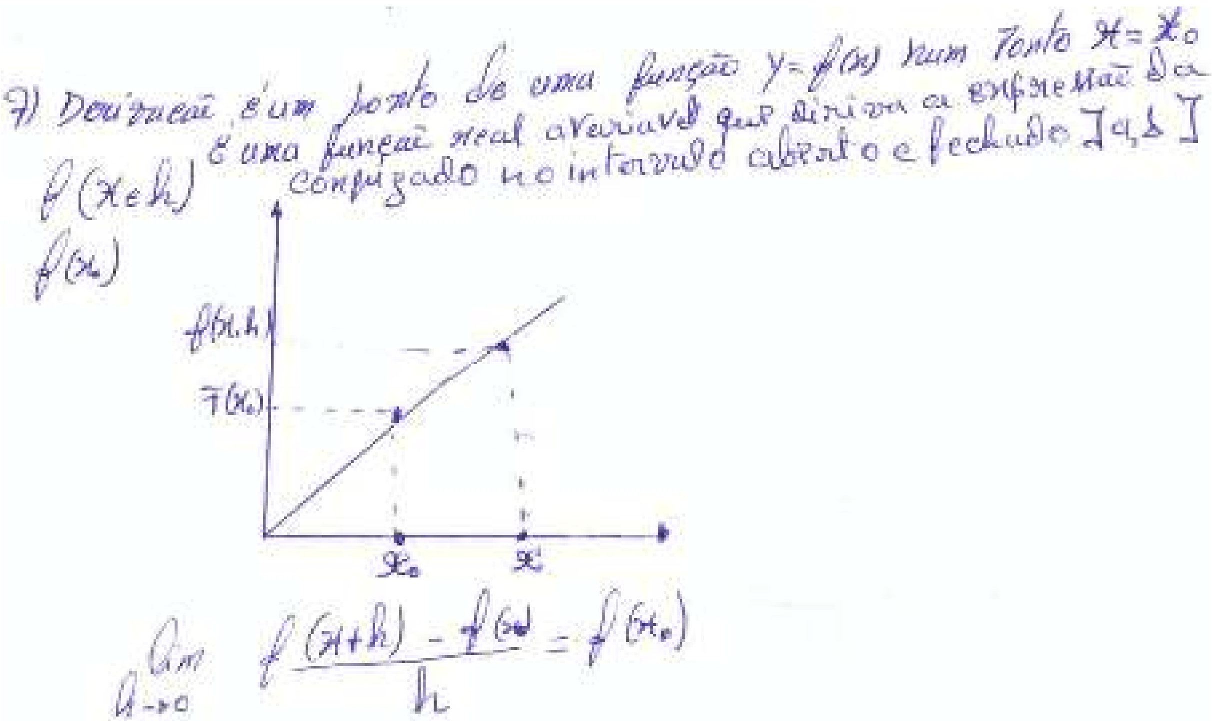


Figura 0.59 Resposta à questão 7 (Ana)

A aluna apresenta (Figura 0.57) um conceito bastante confuso com ideias desarticuladas e alguma falta de rigor na apresentação dos símbolos. A representação gráfica, embora esteja no bom caminho, carece de muita informação para refletir o conceito de derivada de uma função num ponto. Dentre as insuficiências, importa referir que a função $f(x)$ é representada por uma reta e não por uma curva genérica. Dentro da sua resposta podemos encontrar elementos importantes, mas falta relacioná-los. Constatamos a ação mental 1 de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), pois está ilustrada a relação de dependência entre $f(x)$ e x. Constatamos também a ação mental 2, pois está ilustrada a coordenação das variações das duas variáveis. Na representação gráfica a aluna ilustra uma reta como sendo o gráfico da função em estudo, o que revela um raciocínio covariacional linear, portanto, um raciocínio covariacional limitado a funções lineares. Quanto às dificuldades descritas por Tall (1992) na aprendizagem do Cálculo, é visível a imagem mental restrita de função ao basear-se na representação gráfica de uma função linear para definir derivada de uma função num ponto. A aluna revela uma compreensão incipiente do conceito de derivada de uma função num ponto, se tivermos em conta a representação gráfica. Se tivermos em conta a representação algébrica — $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x_0)}{h} = f(x_0)$ no lugar de $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ —, podemos inferir que a aluna tem uma compreensão instrumental do conceito de derivada de uma função num ponto.

Resposta à questão 8 (Figura 0.60).

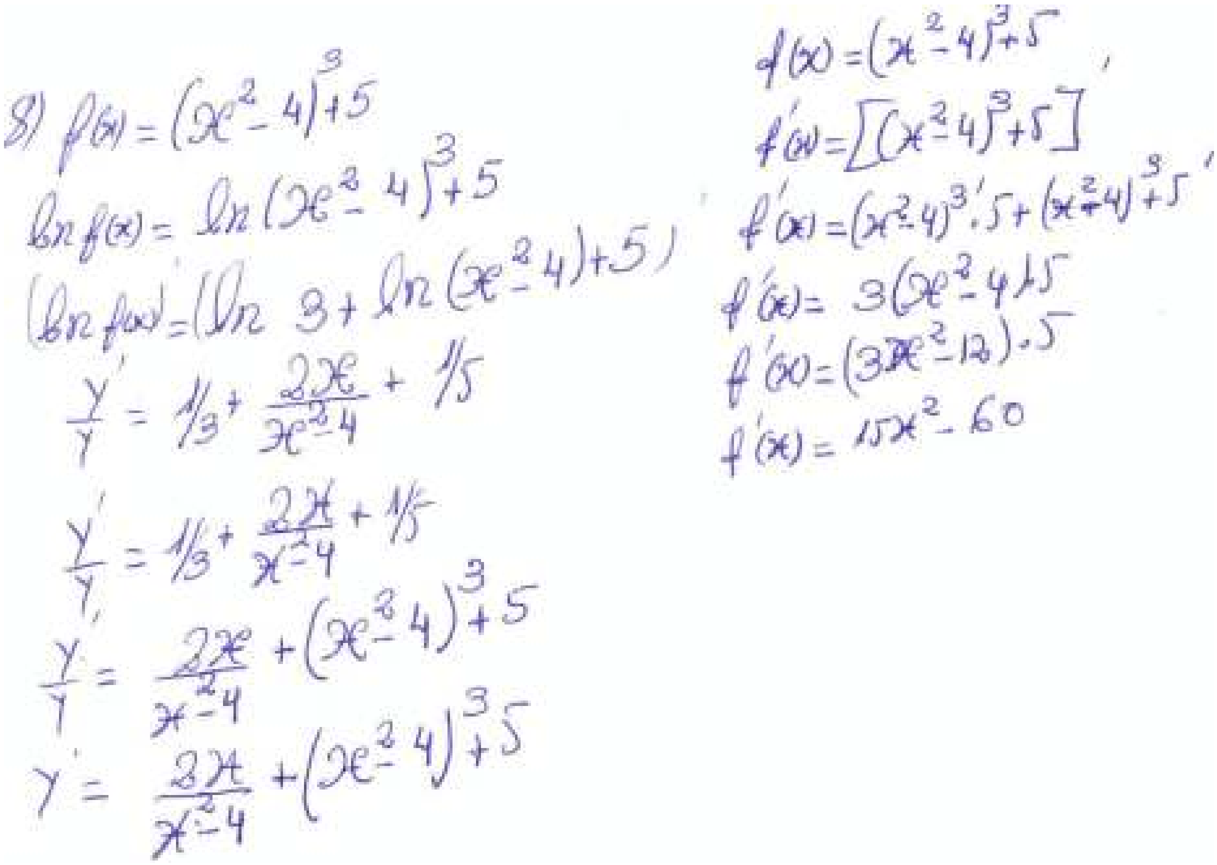


Figura 0.60 Resposta à questão 8 (Ana)

A aluna tenta resolver (Figura 0.60) aplicando logaritmo natural a ambos membros da expressão, mas, na sequência, comete erros operacionais. Começa por complicar algo que é simples e depois, por força da complexidade, acaba por não conseguir manter o seu raciocínio. Apesar de ter resolvido corretamente a questão 4 (Figura

0.23), sobre composição de funções, não tira proveito de tais conhecimentos de função composta para aplicar a regra da cadeia. Aplicando logaritmos, a aluna consegue transformar o expoente, 3, do binómio $(x^2 - 4)$ em coeficiente, o que nos permite inferir que a aplicação de logaritmos é um artifício aplicado para contornar a dificuldade decorrente do expoente 3. A tentativa de resolução, mal sucedida, que faz logo a seguir reforça esta inferência. A aluna tem dificuldades com regras de derivadas, pois na segunda tentativa de resolução aplica mal a regra da cadeia e aplica a regra do produto no lugar da regra da soma. Nos termos do que descreve Tall (1992), é visível a dificuldade da aluna na manipulação algébrica.

Resposta à questão 9 (Figura 0.61).

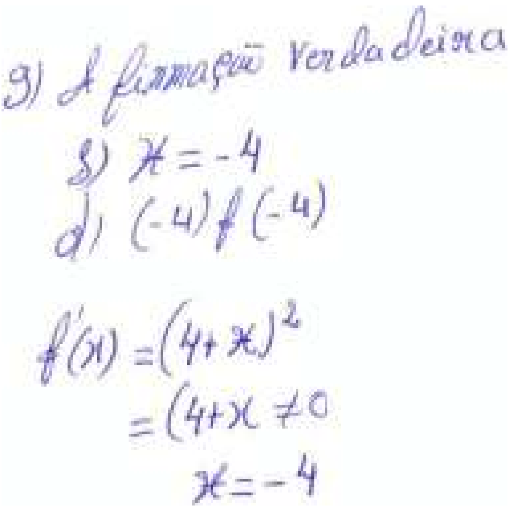


Figura 0.61 Resposta à questão 9 (Ana)

A resposta é apresentada (Figura 0.61) de maneira confusa. Apesar de estar aí a alínea d) que corresponde à alínea correta, a expressão à frente não está correta, o que suscita dúvidas sobre a compreensão da aluna. A entrevista não acrescentou esclarecimento à confusão manifestada. Algebricamente, na alínea que a aluna indica como d), tal como acontece na resposta à questão 8, constatamos a sua dificuldade em derivar funções compostas, particularmente potencias de base binomial.

Resposta à questão 10 (Figura 0.62).

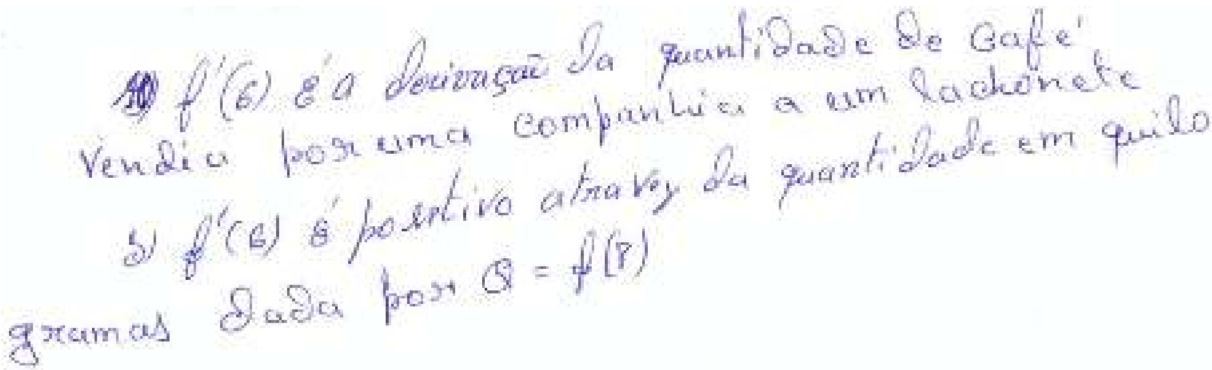


Figura 0.62 Resposta à questão 10 (Ana)

Aqui (Figura 0.62), mais uma vez, temos uma questão que se prende com a interpretação. A aluna mostra dificuldades em interpretar o conceito de derivada de uma função na aplicação a uma situação concreta. Nota-se dificuldades na ação mental 1 de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), a aluna não consegue coordenar a dependência de uma variável noutra, não consegue identificar que variável influencia na outra, isto na alínea a). Considerando também a alínea b), por consequência, a aluna apresenta dificuldades nas ações mentais 2 e 3 (idem). A aluna não consegue identificar a variação de uma variável como consequência de outra. É visível na resolução da questão 10 dificuldades em traduzir problemas do mundo real em formulação de cálculo, conforme descreve Tall (1992). A sua conceção operacional, conforme definida por Sfard (1991), não lhe permite resolver o problema.

Em relação à representação algébrica do conceito de derivada, apresenta dificuldades não expetáveis para os níveis de desempenho apresentados anteriormente. Um caso claro é o da resolução da questão 8, em que se pede a derivada duma função composta. Em relação à representação numérica do conceito de derivada, é motivo de alguma surpresa, pois, para a aluna trata-se de um quadro novo. Em relação à representação gráfica do conceito de derivada, o seu conhecimento não chega a uma interpretação completa do conceito de derivada de uma função num ponto. No que diz respeito ao conceito que tinha de derivada, bem como à capacidade de descrição, esta aluna apresenta um conceito aceitável, embora com algumas imprecisões. Quanto ao raciocínio covariacional de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), identificamos na aluna as ações mentais 1 e 2, embora apoiada na representação gráfica de uma função linear. Quanto às dificuldades descritas por Tall (1992) na aprendizagem do Cálculo, é visível a imagem mental restrita de função ao basear-se na representação gráfica de uma função linear para definir derivada de uma função num ponto, é visível na resolução da questão 10 dificuldades em traduzir problemas do mundo real em formulação de cálculo, bem como é visível na resposta à questão 8 dificuldades na manipulação algébrica. Em relação às teorias da Reificação e APOS, a aluna encontra essencial e respetivamente na fase de condensação e no nível de processo. Essencialmente a aluna revela uma compreensão incipiente do conceito de derivada de uma função, com indícios de compreensão instrumental do ponto de vista algébrico.

3.1.2.5 Armindo

Resposta à questão 7 (Figura 0.63).

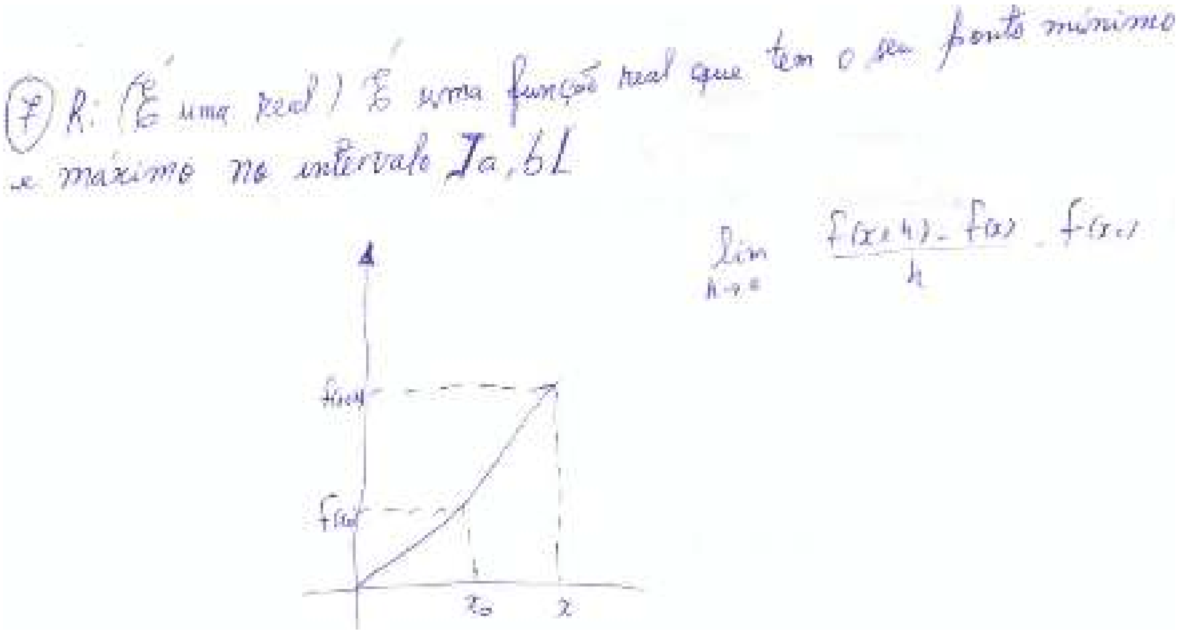
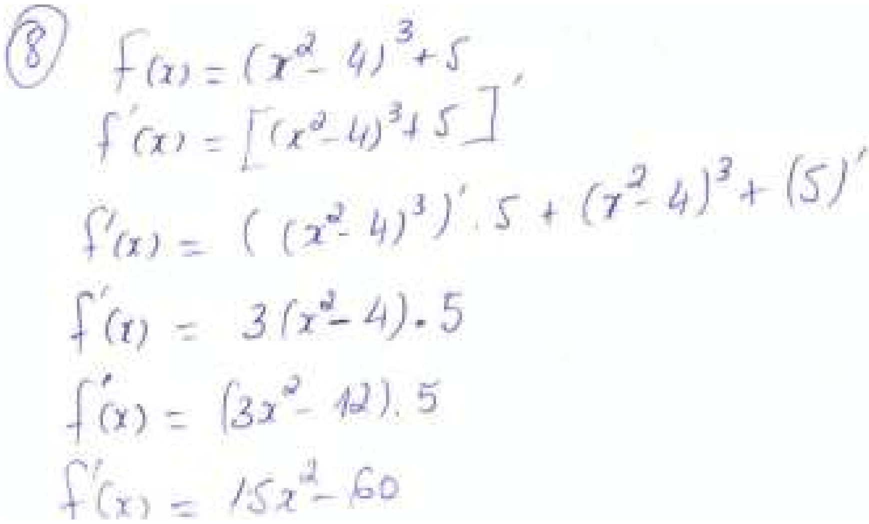


Figura 0.63 Resposta à questão 7 (Armindo)

O aluno apresenta (Figura 0.63) um conceito de derivada de uma função num ponto que se afasta da definição formal. O mesmo se verificou na descrição verbal feita na entrevista. No entanto, na representação gráfica inconclusiva que apresenta, nota-se alguma ideia de variação, tanto da variável independente como da dependente, assim como da relação entre as suas variações. Na representação gráfica, contatamos que o aluno tem uma vaga conceção estrutural. Apesar disso, notamos nesta representação a ação mental 1 de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), pois é visível a relação de dependência entre $f(x)$ e x. Notamos também a ação mental 2, pois é visível a coordenação da quantidade de mudança de $f(x)$ com as alterações na variável x. Na representação algébrica, o aluno mostra uma vaga conceção operacional. Quanto às dificuldades descritas por Tall (1992) na aprendizagem do Cálculo, identificamos uma imagem mental restrita de derivada de função. Em suma, o aluno revela uma compreensão incipente do conceito de derivada de uma função num ponto.

Resposta à questão 8 (Figura 0.64).



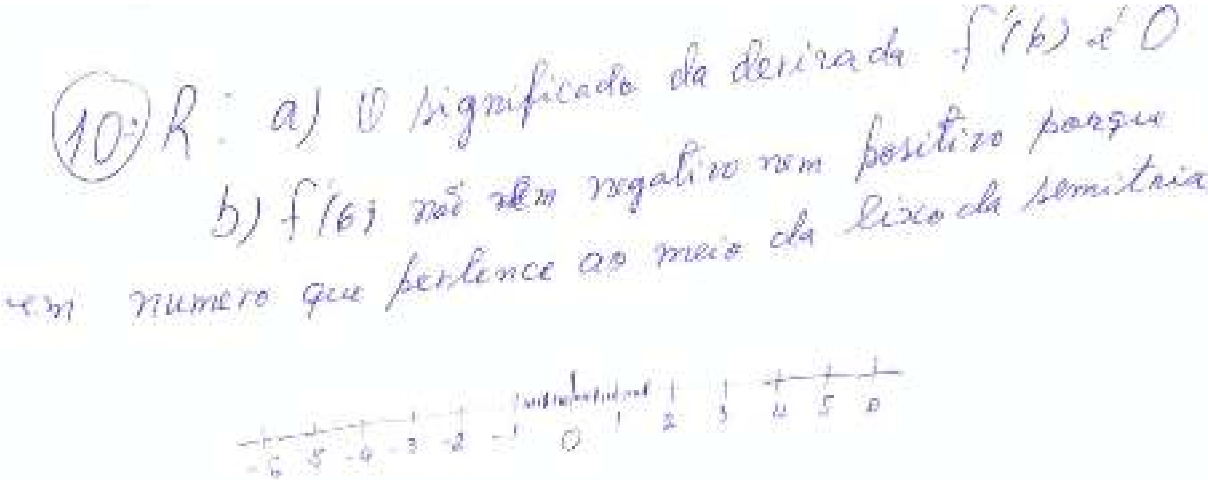
$$f(x) = (x^2-4)^3+5$$
$$f'(x) = [(x^2-4)^3+5]'$$
$$f'(x) = ((x^2-4)^3)' . 5 + (x^2-4)^3 + (5)'$$
$$f'(x) = 3(x^2-4) . 5$$
$$f'(x) = (3x^2-12) . 5$$
$$f'(x) = 15x^2-60$$

Figura 0.64 Resposta à questão 8 (Armindo)

Nesta questão (Figura 0.64) o aluno aplica mal a regra da cadeia, confundindo-a com a regra do produto. O aluno apresenta regras memorizadas sem ter capacidade de identificar em que situações se aplica cada uma delas.

Resposta à questão 9. A alínea correta é a d) e não a c), a escolhida pelo aluno. Além disso, não apresenta uma resolução que sustente a escolha e, na entrevista, nada acrescenta. Não estando justificada a sua escolha e a julgar pelo desempenho manifestado nas questões anteriores, provavelmente o aluno respondeu ao acaso.

Resposta à questão 10 (Figura 0.65).



10. R: a) O significado da derivada f'(6) é 0 porque
b) f(6) não tem negativo nem positivo porque da eixo da semitria
um numero que pertence ao meio da

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

Figura 0.65 Resposta à questão 10 (Armindo)

Entrevistador: Quer acrescenter algo à sua resposta?

Armindo: [silêncio].

Entrevistador: Porquê $f'(6) = 0$?

Armindo: Porque… porque sim.

Entrevistador: OK. Quer falar um pouco da resposta à alínea b)? Do eixo de simetria?

Armindo: Um eixo em que $f'(6)$ é 0 (zero) e está no centro.

Entrevistador: OK.

Aqui (Figura 0.65) mais uma vez temos uma questão que se prende com a interpretação. O aluno apresenta dificuldades em interpretar o conceito de derivada de uma função na aplicação a uma situação concreta. Quanto às dificuldades descritas por Tall (1992) na aprendizagem do Cálculo, dificuldades em traduzir problemas do mundo real em formulação de cálculo. A sua conceção operacional, conforme definida por Sfard (1991), não é suficiente para a resolução do problema.

O aluno não responde corretamente. Apesar disso, é interessante a leitura que se pode fazer de parte da resposta que ele dá: "$f'(6)$ é 0". Assumindo que o aluno associa o conceito de derivada de uma função à ideia de variação e considerando a ação mental 2 de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008) que ele manifesta na representação gráfica da derivada de uma função, notamos que, com a resposta, ele considera estacionária a covariação das variáveis preço e quantidade de café.

Em relação à representação algébrica do conceito de derivada, o aluno apresenta dificuldades consideráveis, não tendo acertado em nenhuma das questões que lhe foram apresentadas. O aluno tem dificuldades na sua conceção operacional. Em relação à representação numérica do conceito de derivada, o aluno apresenta ainda mais dificuldades de relacionar subconceitos, pois sai de um quadro de representação algébrica (questões 8 e 9) para um quadro de representação numérica (questão 10). Em relação ao conceito que tinha e à capacidade de descrição do que fazia, quando procura subconceitos elementares para sustentar as suas respostas revela falta de solidez, um exemplo é a resposta à questão 10. Quanto ao raciocínio covariacional de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), identificamos as ações mentais 1 e 2. Quanto às dificuldades descritas por Tall (1992) na aprendizagem do Cálculo, neste aluno identificamos imagem mental restrita de derivada de função, dificuldades em traduzir problemas do mundo real em formulação de cálculo, bem como dificuldade na manipulação algébrica. Quanto às teorias da Reificação e APOS, o aluno encontra-se respetivamente na fase de interiorização e no nível de ação. O aluno revela uma conceção operacional e uma compreensão incipiente do conceito de derivada de uma função.

3.1.2.6 Edson

Resposta à questão 7 (Figura 0.66).

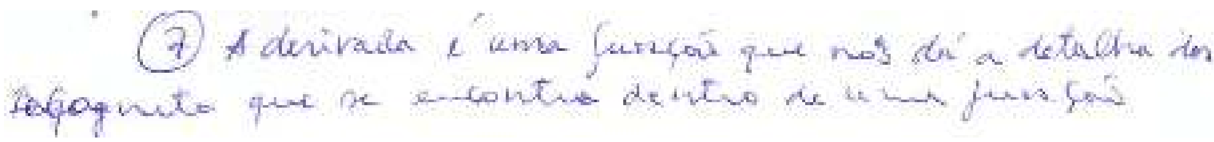


Figura 0.66 Resposta à questão 7 (Edson)

O conceito apresentado pelo aluno — "A derivada é uma função que nos dá o detalhe da incógnita que se encontra dentro de uma função" — está à margem do conceito de derivada de uma função num ponto. A descrição verbal do aluno não acrescenta nada de novo. Notamos a ação mental 1 de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), quando o aluno diz "nos dá o detalhe da incógnita que se encontra dentro de uma função", pois é visível a variável independente a que ele chama de "incógnita" e o reflexo desta na variável dependente ao dizer "que nos dá detalhe". É visível também uma imagem mental restrita do conceito de derivada de uma função, conforme descrita por Tall (1992). Tendo em conta o modelo 3UV de Trigueros & Usini (2003), é visível a confusão que o aluno faz entre as categorias variáveis relacionadas e incógnita. O aluno tem uma compreensão do conceito de derivada de uma função incipiente.

Resposta à questão 8 (Figura 0.67).

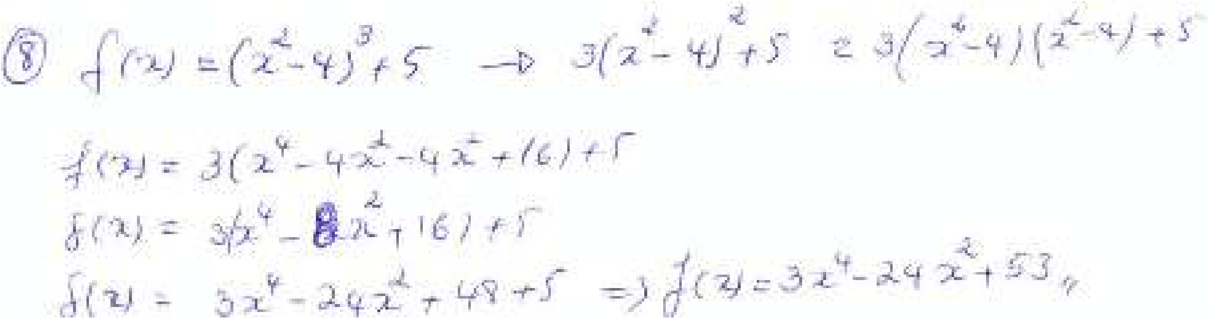


Figura 0.67 Resposta à questão 8 (Edson)

O aluno aplica a primeira derivada de forma diferente da esperada — apresenta $f(x) = (x^2 - 4)^3 + 5 \rightarrow 3(x^2 - 4)^2 + 5$ em vez de apresentar $f(x) = (x^2 - 4)^3 + 5 \Rightarrow f'(x) = 3(x^2 - 4)^2$ — e, a seguir, faz o seu desenvolvimento algébrico colocando $f(x)$ no lugar de $f'(x)$, transforma uma potência de base binomial em soma de monómios, ou seja, apresenta o polinómio na forma canónica. Aplica regras memorizadas, mas sem critérios orientadores. Na transformação que faz revela dificuldade em selecionar e usar representação apropriada conforme descrita por Tall (1992).

A questão 9 ficou sem resposta tanto no questionário como na entrevista, denotando assim reflexo das dificuldades visíveis nos desempenhos do aluno nas questões anteriores do instrumento em análise (Apêndice 3: Questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos), particularmente nas questões 7 e 8.

Resposta à questão 10 (Figura 0.68).

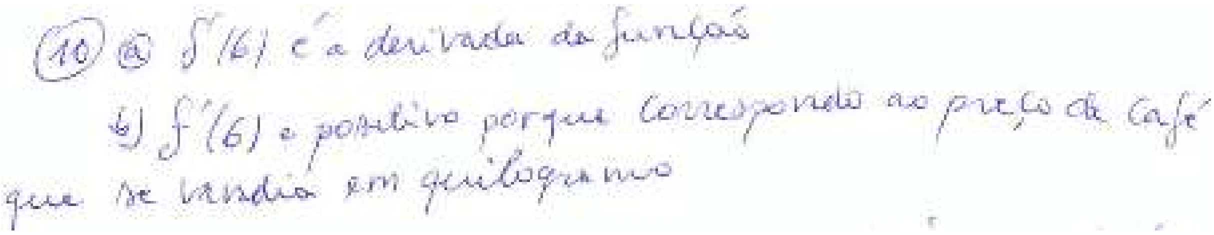


Figura 0.68 Resposta à questão 10 (Edson)

O aluno apresenta dificuldades em interpretar o conceito de derivada de uma função na aplicação a uma situação concreta, revelando dificuldades em traduzir problemas do mundo real em formulação de cálculo conforme descreve Tall (1992). Reconhece $f'(6)$ como a derivada de uma função, mas tem dificuldades em relacionar conceitos, portanto, não atingiu o nível de compreensão relacional.

Em relação à representação algébrica do conceito de derivada, não é capaz de apresentar bom desempenho nas respostas ao questionário. Em relação à representação numérica do conceito de derivada, revela conhecimento desconexo de algumas regras de derivada. Em relação à representação gráfica, não apresenta desempenho assinalável. No que diz respeito ao conceito que tem, bem como à capacidade de descrição do que faz, sustenta-se apenas na ação. Em relação ao raciocínio covariacional de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), o desempenho do aluno revela a ação mental 1. No que diz respeito às dificuldades na aprendizagem do Cálculo descritas por Tall (1992), o desempenho do aluno revela imagem mental restrita de função, dificuldades em traduzir problemas do mundo real em formulação de cálculo, dificuldades na manipulação algébrica. À luz da Teoria da Reificação, o aluno não supera a fase de interiorização. Quanto à Teoria APOS, o aluno revela uma estrutura mental a nível de ação. O aluno revela um nível de compreensão incipiente do conceito de derivada de uma função.

3.1.2.7 Eduardo

Este aluno não responde a qualquer questão sobre derivada no questionário. Quanto à entrevista prefere não arriscar. Constatamos aqui reflexos das dificuldades apresentandas pelo aluno na primeira parte do questionário de caraterização da estrutura cognitiva do aluno (Apêndice 3). O seu nível de compreensão incipiente do conceito de função identificado nas dificuldades em raciocínio covariacional — conforme descrevem Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008) —, na fraca imagem mental de função, na fraca aplicação das propriedades dos números reais — tendo em conta a descrição de Tall (1992) —, entre outras dificuldades consequentes, não lhe permite resolver as questões de 7 a 13 do mesmo questionário. À luz das teorias da Reificação e APOS, podemos inferir que o aluno deixou de ter objetos matemáticos conhecidos e familiares em quantidade suficiente para lhes poder aplicar novos procedimentos. Portanto, o aluno tem um nível de compreensão do conceito de derivada de uma função incipiente.

3.1.2.8 Efigénio

Resposta à questão 7 (Figura 0.69).

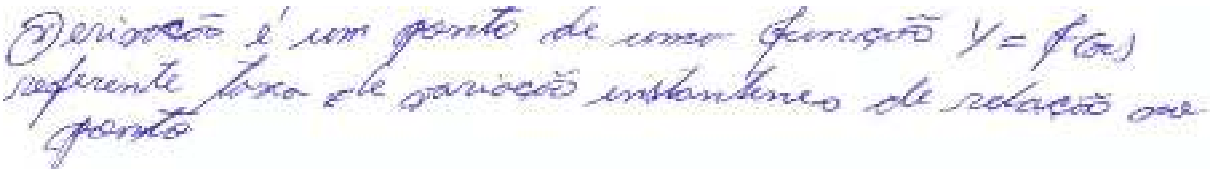


Figura 0.69 Resposta à questão 7 (Efigénio)

O aluno apresenta uma definição — "é um ponto de uma função $y = f(x)$ referente taxa de variação instantâneo de relação no ponto" — desconexa, muito deslocada da definição de derivada de uma função num ponto. Consegue verbalizar conceitos importantes, como por exemplo o de variação instantânea, mas não os consegue relacionar. É visível a existência de raciocínio covariacional de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), onde identificamos a ação mental 1 e indícios da ação mental 5. Quanto às dificuldades na aprendizagem do Cálculo descritas por Tall (1992), é notória uma fraca imagem mental de função. Deste modo, podemos considerar o nível do aluno de compreensão do conceito de derivada de uma função como incipiente.

Resposta à questão 8 (Figura 0.70).

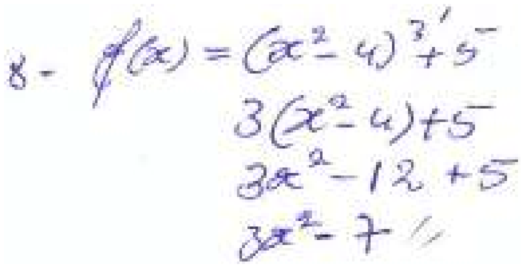


Figura 0.70 Resposta à questão 8 (Efigénio)

O aluno não consegue aplicar a regra da cadeia. Nota-se que tem memória de parte do procedimento, pois, no primeiro passo, apresenta o expoente 3 como coeficiente do binómio (x^2-4). Fora deste sinal de alguma memória do procedimento, o aluno apresenta uma resolução diferente da esperada. Entre as dificuldades na aprendizagem do Cálculo descritas por Tall (1992) identificamos dificuldade em selecionar e usar representações apropriadas, pois representa a derivada da função por $f(x) = (x^2-4)^{3'} + 5$ em vez de $f'(x) = [(x^2-4)^3 + 5]'$.

Resposta à questão 9 (Figura 0.71).

Figura 0.71 Resposta à questão 9 (Efigénio)

A alínea correta é a d), mas o aluno, como se de uma questão de múltipla escolha se tratasse, escolhe as alíneas c) e b) (Figura 0.71). Tendo em conta a não fundamentação na entrevista e o seu fraco desempenho nas outras questões sobre Cálculo Diferencial, podemos inferir que as suas respostas resultam de escolhas aleatórias.

O Efigénio é um aluno com aproveitamento escolar fraco. Em relação ao conceito que tem e à capacidade de descrição do que faz, apresenta a definição de derivada de uma função num ponto de maneira desarticulada, sem relacionar os conceitos dentro dela. Quanto ao raciocínio covariacional de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), identificamos a ação mental 1. Em relação às dificuldades de aprendizagem do Cálculo descritas por Tall (1992), identificamos uma fraca imagem mental de função, bem como dificuldade em selecionar e usar representações apropriadas. Quanto à Teoria da Reificação, o aluno não supera a fase de interiorização. Quanto à Teoria APOS, o aluno revela uma estrutura mental a nível de ação. Em relação às representações algébrica, numérica e gráfica, apresenta níveis de conceito imagem incipientes.

3.1.2.9 Elias

Resposta à questão 7 (Figura 0.72).

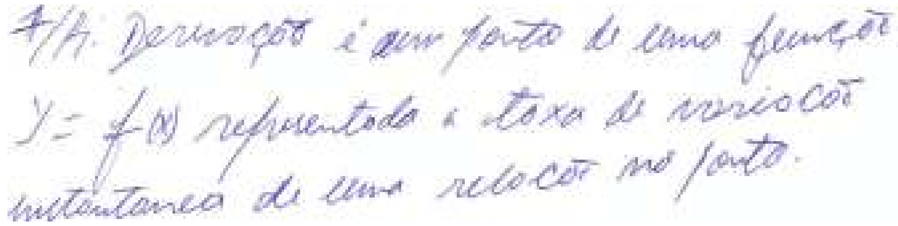


Figura 0.72 Resposta à questão 7 (Elias)

O aluno apresenta uma ideia — "Derivação é um ponto de uma função $y = f(x)$ representada a taxa de variação instantânea de uma relação no ponto" — que se afasta da definição de derivada de função num ponto. Apesar dos conceitos-chave presentes na ideia, a mesma não os relaciona. Quanto ao raciocínio covariacional de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), apesar de não estar tão evidente, podemos considerar a presença da ação mental 1. Em relação às dificuldades na aprendizagem do Cálculo descritas por Tall (1992), é visível uma fraca imagem mental de função. Deste modo, podemos afirmar que o aluno tem um nível de compreensão do conceito de função incipiente.

Resposta à questão 8 (Figura 0.73).

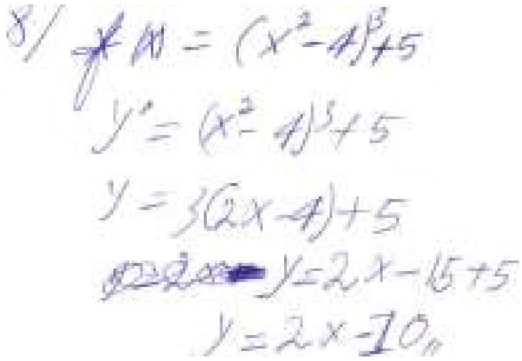


Figura 0.73 Resposta à questão 8 (Elias)

O aluno não consegue aplicar a regra da cadeia. Faz apenas alguns procedimentos que aparentemente são memorizados. Nota-se que tem alguma ideia da fórmula da derivada da potência — $(x^n)' = nx^{n-1}$ —, porém, da regra da cadeia não se nota evidências. Das dificuldades na aprendizagem do Cálculo descritas por Tall (1992), são visíveis: (1) dificuldade em selecionar e usar representações apropriadas, por exemplo, escreve $y' = (x^2 - 4)^3 + 5$ em vez de $y' = [(x^2 - 4)^3 + 5]'$ e, logo a seguir, escreve $y = 3(2x - 4) + 5$ em vez de $y' = 3(2x - 4)^2$; (2) dificuldade na manipulação algébrica, por exemplo, sai de $y = 3(2x - 4) + 5$ para $y = 2x - 15 + 5$. Nesta questão o aluno revela um nível de compreensão do conceito de derivada de função essencialmente incipiente com sinais de instrumental.

Resposta à questão 9 (Figura 0.74).

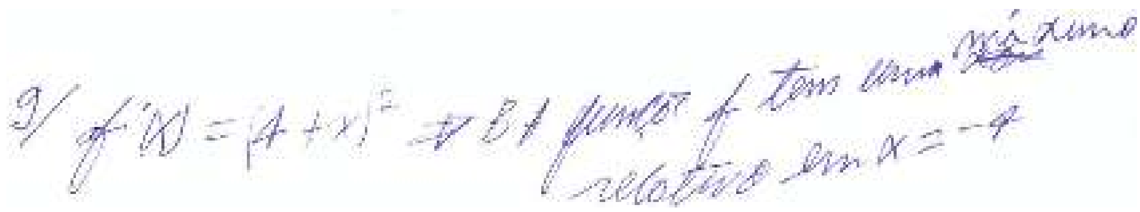


Figura 0.74 Resposta à questão 9 (Elias)

A alínea correcta é a d), o aluno apresenta a alínea b) como sendo a correta. A primeira derivada, $f'(x) = (4 + x)^2$, é positiva para todo e qualquer valor de x, logo, da vizinhança à esquerda para a vizinhança à direita de $x = -4$ não há mudança de sinal e, consequentemente, $x = -4$ não pode ser a abscissa de um ponto extremo. O que mais provavelmente acontece é que o aluno tem um desempenho direcionado para procedimentos típicos, ou seja, toma a primeira derivada como se da função dada se tratasse e, a partir dela, obtém uma derivada e o falso ponto de máximo relativo. Há indícios de procedimentos mecanizados, o que limita a capacidade de interpretação em situações atípicas. O desempenho nesta questão é reflexo do desempenho do aluno nas questões anteriores do questionário (Apêndice 3: Questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos) em análise, particularmente do desempenho nas questões 7 e 8 em que o aluno revela um nível de compreensão do conceito de derivada de uma função essencialmente incipiente.

Resposta à questão 10 (Figura 0.75).

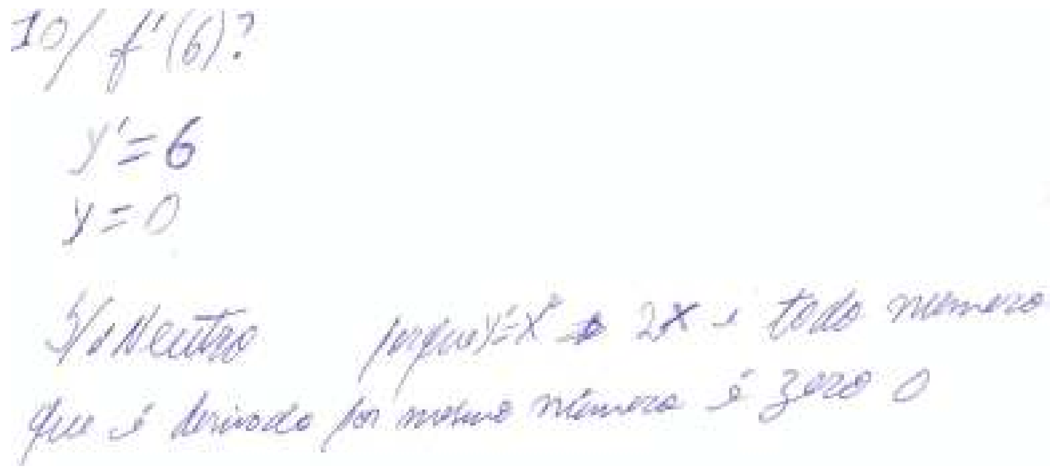


Figura 0.75 Resposta à questão 10 (Elias)

O aluno apresenta dificuldades em interpretar o conceito de derivada de uma função na aplicação a uma situação concreta. Apresenta desarticuladamente alguns procedimentos. Apresenta $f'(6)$?, como elemento a calcular, mas, a seguir apresenta $y' = 6$, confundindo o ponto de avaliação da primeira derivada com expressão a derivar. Logo a seguir apresenta $y = 0$. Há aqui claramente desarticulação de conceitos e falta de rigor na resolução. O aluno mostra mais dificuldades no quadro numérico do que no quadro algébrico do conceito de derivada de uma função.

Nas representações algébrica, numérica e gráfica constatamos ter uma visão a nível de ação. O mesmo se nota na sua capacidade de fazer descrições. O aluno apresenta algumas palavras-chave, mas tem dificuldades em compreender e relacionar os conceitos associados a tais palavras-chave. Quanto ao raciocínio covariacional de

Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), identificamos a ação mental 1. Em relação às dificuldade na aprendizagem do Cálculo descritas por Tall (1992), idenficamos uma fraca imagem mental, dificuldades em selecionar e usar representações apropriadas, bem como dificuldades na manipulação algébrica. Quanto à Teoria da Reificação, o aluno encontra-se na fase de interiorização. Quanto à Teoria APOS, o aluno revela uma estrutura mental a nível de ação. O aluno tem um nível de compreensão do conceito de derivada de uma função incipiente.

3.1.2.10 Emanuela

Esta aluna não responde a qualquer questão sobre derivada no questionário. Quanto à entrevista, consegue fazer algumas verbalizações.

> Entrevistador: O que entende por derivada de uma função?
>
> Emanuela: A derivada da constante dá zero, a derivada de x dá 1 e outras derivadas que encontramos na tabela [de derivadas].
>
> Entrevistador: E a derivada da função dada genericamente, $f(x)$?
>
> Emanuela: Dá $f'(x)$.

À análise feita ao desempenho da aluna nas questões sobre função do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3) importa acrescentar a dificuldade na aprendizagem do Cálculo descrita por Tall (1992) como a preferência por métodos procedimentais no lugar de compreensão concetual. Importa também referir a considerável dificuldade em exprimir raciocínio covariacional, bem como a visão de ação conforme descritos por Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008). É também de referir que à luz da Teoria da Reificação a aluna apresenta uma conceção operacional e encontra-se na primeira fase interiorização do conceito de deriva de uma função. À luz da teoria APOS, a aluna apresenta um domínio do conceito de derivada de uma função ao nível da estrutura mental ação. Portanto, a aluna tem um nível de compreensão do conceito de derivada de uma função incipiente.

3.1.2.11 Conclusões sobre o conceito de derivada

Na tabela (Tabela 15) que sintetiza o nível de desempenho dos alunos nas questões sobre diferenciação nota-se uma maior frequência de alunos a nível de ação. Isto não é por acaso. É que para a aprendizagem da diferenciação precisa-se de uma boa aprendizagem do conceito de função. Havendo dificuldades no ciclo de aprendizagem de função, elas repercutem-se no ciclo de aprendizagem de diferenciação. Um indicador desta constatação é o da relação entre composição de funções e a aplicação da regra da cadeia, mais precisamente a relação entre as questões 4 e 8 do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3), respetivamente. Todos os alunos — Alexandra, Efigénio, Elias e Emanuela — que não resolveram corretamente a questão 4 também não resolveram corretamente a questão 8. Nos dados estudados a não resolução da questão 4 implicou a não resolução da questão 8. Ambas as questões são de resolução algébrica. Nota-se uma tendência de os alunos com dificuldades nas questões sobre funções aumentarem as suas dificuldades nas questões sobre derivada. A condição é necessária e não suficiente, o desempenho da Ana na questão 8 não é bom, resolve incorretamente, apesar de ter resolvido corretamente a questão 4.

Tabela 15: Estrutura cognitiva associada ao conceito de derivada

Aluno	Representação algébrica			Representação numérica			Representação gráfica		
	Ação	Processo	Objeto	Ação	Processo	Objeto	Ação	Processo	Objeto
Alexandra	X			X			X		
Amarildo		X			X		X		
Amaro		X		X				X	
Ana		X		X			X		
Armindo	X			X			X		
Edson	X			X			X		
Eduardo	X			X			X		
Efigénio	X			X			X		
Elias	X			X			X		
Emanuela	X			X			X		

Por outro lado, notamos a tendência de alunos com melhor desempenho no conceito de função apresentarem melhor desempenho no conceito de derivada, particularmente no que a representação algébrica diz respeito. Repare-se nos desempenhos do Amarildo, do Amaro e da Ana, são os melhores desempenhos na aprendizagem do conceito de derivada. Como já se pôde constatar (Tabela 14) são os que têm melhor desempenho sobre o conceito de função. Para além dos três, importa assinalar o caso do Eduardo que, no conceito de função, apresentou um desempenho ao nível dos três alunos referidos anteriormente. Apesar disso, o seu desempenho no conceito de derivação está a nível de ação. Sobre este aluno podemos concluir que a dificuldade está na aprendizagem do conceito de diferenciação e não tanto nas dificuldades do conceito de função.

Particularmente nas respostas à questão 10, notamos a hierarquia entre as ações mentais definida pelo nível de solidez dos conceitos. Quanto mais sólidos são os conceitos maior é o conjunto de ações mentais de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008) desenvolvidas pelos alunos. Geralmente as ações mentais surgem em sequência, podendo haver casos de rutura na sequência como, aliás, se verificou em relação à ação mental 4. Em relação às dificuldades na aprendizagem do Cálculo descritas por Tall (1992), encontramos evidências de imagem mental restrita de função ou de derivada de uma função em oito dos 10 alunos (Alexandra, Ana, Armindo, Edson, Eduardo, Efigénio, Elias e Emanuel), o que, sendo a imagem mental da função uma competência, repercutiu-se noutras dificuldades, algumas com evidências encontradas e outras prováveis.

Em relação à Teoria da Reificação, dois alunos, Amarildo e Amaro, apresentam desempenhos que nos permitem enquadrar os seus estados de conceção na fase de condensação, com indícios da fase de reificação. Uma aluna, Ana, tem um estado de conceção que pode ser enquadrado essencialmente na fase de condensação. Os demais alunos, pelo desempenho que apresentam, são enquadrados na fase de interiorização. Em relação à Teoria APOS, os alunos Amarildo e Amaro apresentam desempenhos que nos permitem enquadrar os seus raciocínios na estrutura mental processo, com alguns indícios da estrutura mental objeto. Com uma mesma estrutra mental, mas menos consistente, encontra-se a aluna Ana. Os demais alunos apresentam um raciocínio a nível da estrutura mental ação.

3.1.3 Estrutura cognitiva associada ao conceito de integração

Nesta secção as questões do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3) consideradas são as seguintes:

11 O que entende por integração?

12 Calcule $\int \mathrm{x}\sqrt{1+\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}$.

13 Seja $\mathrm{r(t)}$ a taxa de do consumo mundial de petróleo, onde t é medido em anos começando em $\mathrm{t}=0$ em 1 de Janeiro de 2000 e $\mathrm{r(t)}$ é medida em barris por ano. O que representa $\int_0^8 \mathrm{r(t)dt}$?

3.1.3.1 Alexandra

Resposta à questão 11. Esta questão foi deixada em branco. No conceito que apresenta verbalmente, a aluna faz uma descrição da expressão algébrica da integral de uma função — o símbolo de integração, o integrando e o diferencial de x, dx —, bem como descreve os passos para a integração de funções elementares e, precariamente, para a integração pelo método de susbstituição. A aluna não consegue mais do que verbalizar algumas caraterísticas desconexas que podem ser associadas ao conceito. Dentre as dificuldades descritas por Tall (1992), notamos aqui preferência por métodos procedimentais em detrimento de compreensão concetual. Como reflexo de dificuldades no raciocínio covariacional reveladas anteriormente, notamos uma visão de ação — conforme descrevem Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008) — do conceito de integral de uma função. Quanto às teorias da Reificação e APOS, a aluna encontra-se na fase de interiorização e no nível de estrutura mental ação. Portanto, a aluna tem um conceito de integral de uma função incipiente.

Resposta à questão 12 (Figura 0.76).

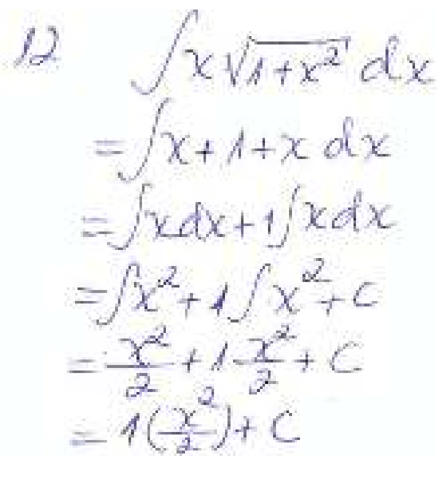


Figura 0.76 Resposta à questão 12 (Alexandra)

Logo no primeiro passo aplica incorretamente propriedades dos radicais — transforma $x\sqrt{1+x^2}$ em $x+1+x$ —, o que faz com que a aluna vá numa direção diferente daquela que se pretendia com a questão. Falta-lhe, pelo menos a nível de ação, o domíno das propriedades de radicais. Do segundo passo para o terceiro aplica incorretamente a propriedade da linearidade da integral — $\int[af(x)+bg(x)]dx =$

$a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$ — ao sair de $\int x + 1 + xdx$ para $\int xdx + 1\int xdx$. Algebricamente a aluna tem dificuldades com o conceito e as propriedades dos radicais, o que impede, no caso, a resolução correta do exercício. Pondo de parte a questão dos radicais e da propriedade da linearidade da integral, constatamos nos três últimos passos que a aluna consegue aplicar corretamente a fórmula de integração de monómios à primeira das três parcelas. Quanto às dificuldades descritas por Tall (1992) na aprendizagem do Cálculo, a aluna tem dificuldades na manipulação algébrica, bem como dificuldade no uso da notação do diferencial da variável independente, por exemplo escreve $\int x + 1 + x\, dx$ em vez de $\int(x + 1 + x)dx$, no passo seguinte escreve $\int xdx + 1\int xdx$ em vez de $\int xdx + \int dx + \int xdx$, permitindo-nos inferir que tem dificuldades em selecionar e usar a representação apropriada. O desempenho revela um nível de compreensão do conceito de integral de uma função incipiente.

Resposta à questão 13. Esta questão foi deixada em branco. Trata-se de uma questão que carece de interpretação. Sem o domínio do conceito de integral as dificuldades na sua resolução são maiores. Em relação às dificuldades descritas por Tall (1992), a aluna tem dificuldades em traduzir problemas do mundo real em formulação de Cálculo.

As dificuldades que a aluna apresenta nas questões sobre funções e cálculo diferencial no questionário sobre a estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3) repercutem-se nas questões seguintes sobre cálculo integral do mesmo questionário. A repercussão é natural, pois em Cálculo o objeto de estudo são as funções. No que diz respeito concretamente ao cálculo integral, a aluna tem fraco domíno de procedimentos e dificuldades em discernir sobre a sua aplicação. Em relação às dificuldades descritas por Tall (1992), identificamos preferência por métodos procedimentais em detrimento de compreensão concetual, dificuldades na manipulação algébrica, dificuldade no uso da notação do diferencial da variável independente, dificuldade em selecionar e usar a representação apropriada, bem como dificuldades em traduzir problemas do mundo real em formulação de Cálculo. Quanto às teorias da Reificação e APOS, a aluna encontra-se na fase de interiorização e no nível de estrutura mental ação. Portanto, a aluna tem uma compreensão do conceito de integral de uma função incipiente.

3.1.3.2 Amarildo

Resposta à questão 11 (Figura 0.77).

Figura 0.77 Resposta à questão 11 (Amarildo)

Apresenta um conceito de integral fazendo recurso à interpretação geométrica da definição de integral de uma função. Apesar de algumas imprecisões, na sua resposta está presente a interpretação geométrica da integral de uma função. Na entrevista não fundamenta a sua resposta, apenas a mantém, o que pressupõe dizer que é uma informação memorizada, mas não relacionada com conceitos do cálculo integral.

Tendo a sustentação em imagética visual, o conceito pode estar baseado numa conceção estrutural, ainda que não tenha sido reificado. Podemos considerar um conceito condensado, à luz da Teoria da Reificação, e um nível de compreensão do conceito de integral de uma função instrumental.

Resposta à questão 12 (Figura 0.78).

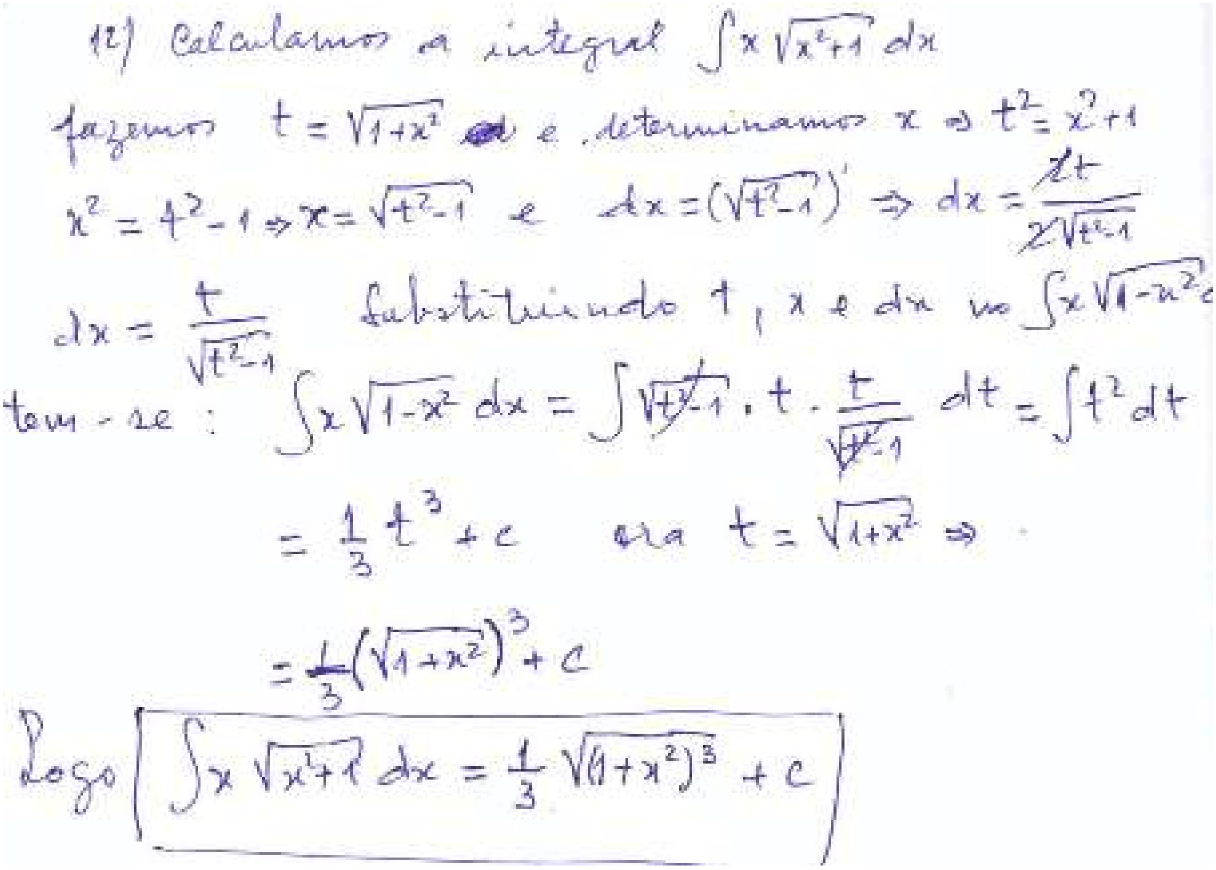


Figura 0.78 Resposta à questão 12 (Amarildo)

Poderia tirar melhor proveito da substituição feita, o que resultaria numa resolução mais simples ($1+x^2$ por t). Apesar disto, chega ao resultado final correto, com uma resolução correta. Mais uma vez o aluno mostra a capacidade de trabalhar símbolos algébricos, a capacidade de trabalhar com funções. O aluno domina o método de substituição, bem como procedimentos e propriedades associados ao método, nomeadamente propriedades dos radicais, propriedades de potências e procedimento para mudança de variável. O Amarildo mostra assim um bom desempenho em termos processuais no cálculo simbólico, que estão interiorizados, mas que carecem de coordenação com outros processos para poderem ser capsulados na construção do conceito. Deste modo, o aluno revela um nível de compreensão do conceito integral de uma função instrumental.

Resposta à questão 13 (Figura 0.79).

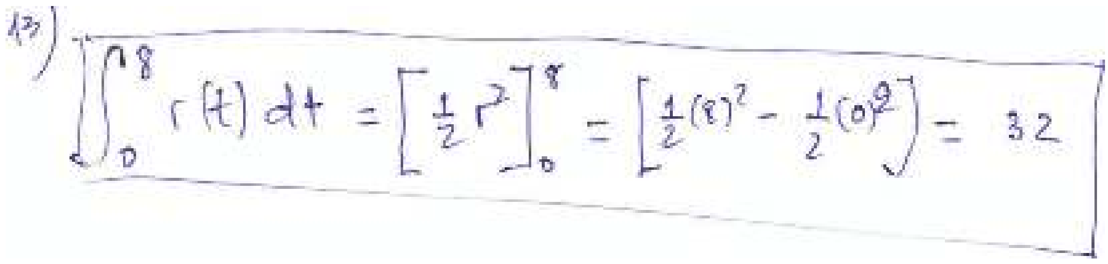


Figura 0.79 Resposta à questão 13 (Amarildo)

Esta questão é de interpretação, onde o integrando, $r(t)$, está dado de maneira genérica, portanto, não é possível calcular a integral. A resposta que se procura é uma descrição do que representaria o resultado, em caso de cálculo. Sendo a integral geometricamente interpretada como a área da superfície delimitada pela curva, pelo eixo das abscissas e pelas retas $t = 0$ e $t = 8$, a integral $\int_0^8 r(t)dt$ representa o consumo de petróleo do ano 2000 ao ano 2008. O aluno não reconhece $r(t)$ como uma função genérica e tenta reduzi-la a um caso concreto, o caso de $f(r) = r$. Deste modo, ignora também dt e, mentalmente, passa a considerar dr. A resolução do aluno é reflexo de uma abordagem da questão a nível de processo e de dificuldade em, segundo Tall (1992), traduzir problemas do mundo real em formulação de Cálculo. O desempenho do aluno nesta questão confirma o seu desempenho na questão 11, ou seja, tem um conceito de integral de uma função mais memorizado do que relacionado com outros conceitos. Em termos da Teoria da Reificação, notamos que o aluno encontra-se na fase da condensação. Pela análise feita, notamos que o nível de compreensão do conceito de integral de uma função é instrumental.

O Amarildo, em relação ao conceito que tem e à capacidade de descrição, faz uma reprodução de um conceito de integral memorizado, assente na sua interpretação geométrica. Em relação às representações algébrica, numérica e gráfica de função, mantém o nível apresentado nas resoluções das questões anteriores do questionário. Em relação à questão 13 (Figura 0.79), podemos inferir que o aluno está mais preparado para aplicar procedimentos do que para interpretar questões atípicas. Na mesma questão o aluno revela dificuldade em, segundo Tall (1992), traduzir problemas do mundo real em formulação de Cálculo. Quanto à teoria da Reificação, notamos que o aluno está na fase de reifição, tendo uma conceção estrutural de integral de uma função. O aluno tem um nível de compreensão do conceito de integral de uma função instrumental.

3.1.3.3 Amaro

Resposta à questão 11 (Figura 0.80).

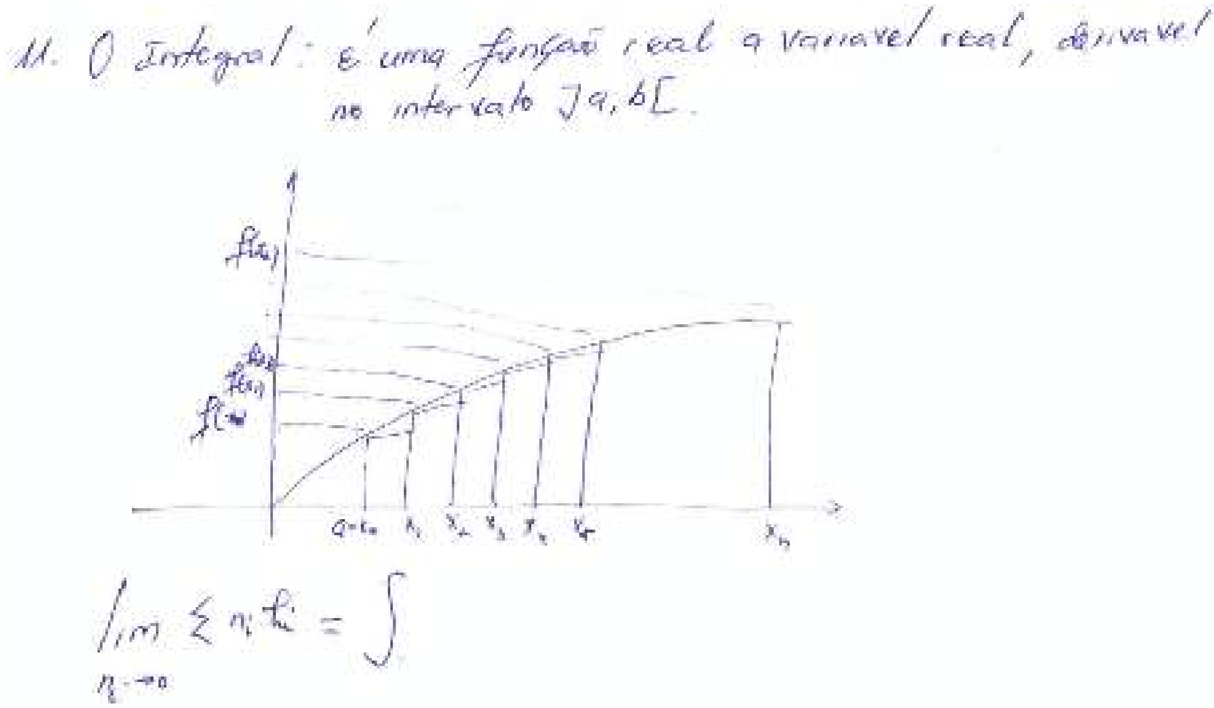


Figura 0.80 Resposta à questão 11 (Amaro)

Por aquilo que o aluno apresenta (Figura 0.80), nota-se que tem ideia do assunto, baseada numa interpretação geométrica. A ideia está incompleta, mas dela constam aspetos importantes do conceito. A representação gráfica remete-nos à ideia de cálculo, pelo método de exaustão, da área delimitada pela curva da função em análise, pelo eixo das abscissas e pelas retas $x = x_0$ (ou $x = a$) e $x = x_n$ (ou $x = b$). Tendo em conta a imagética visual refletida na representação gráfica, o aluno apresenta uma conceção estrutural importante para a construção do conceito. Apesar disto, e tendo em conta por exemplo a sua limitação na representação algébrica do conceito de integral de uma função, o aluno não tem o conceito reificado. Deste modo, inferimos que o aluno tem um nível de compreensão do conceito de integral de uma função instrumental.

Resposta à questão 12 (Figura 0.81).

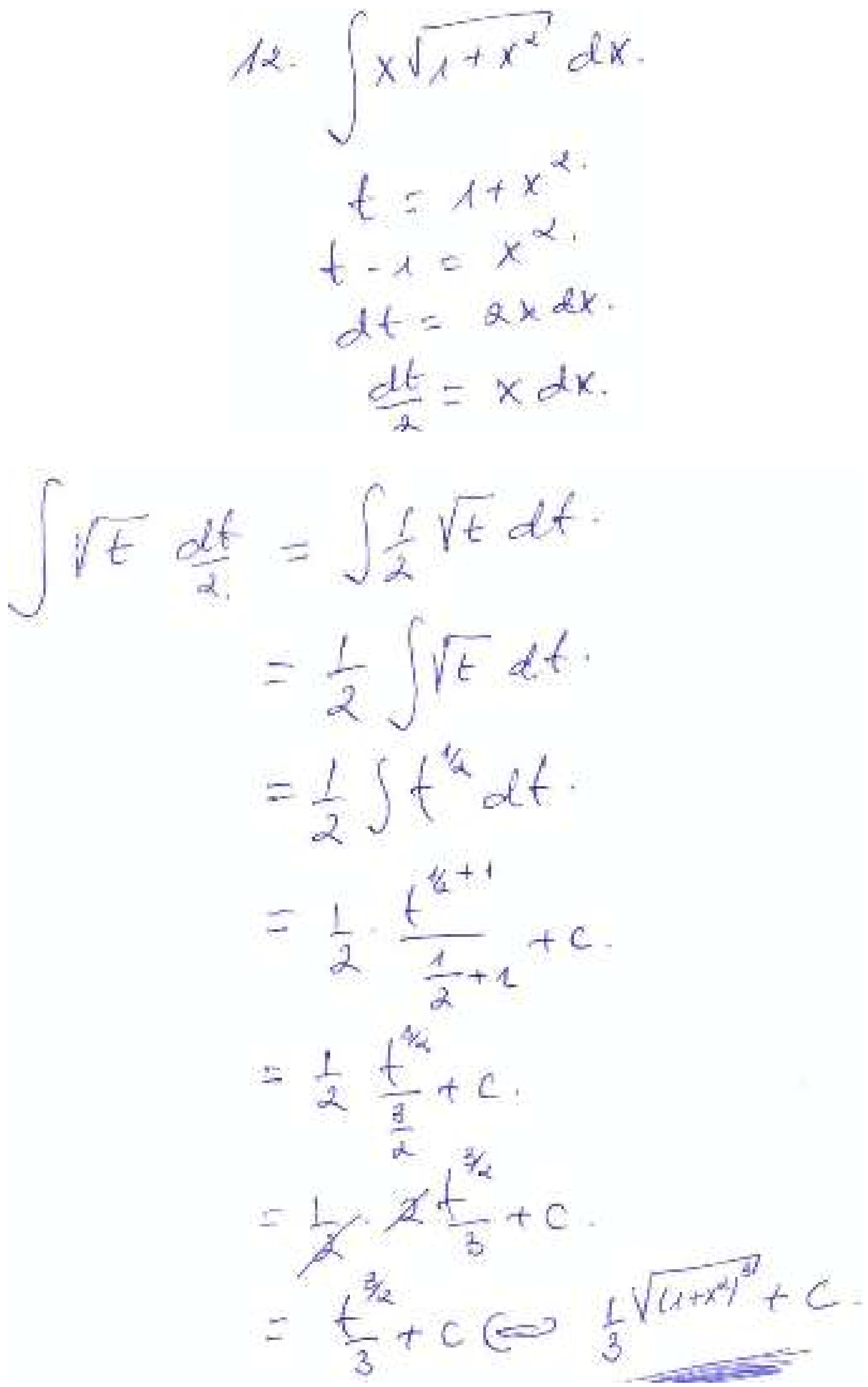


Figura 0.81 Resposta à questão 12 (Amaro)

O aluno apresenta uma resolução correta, o que revela que tem domínio do procedimento de resolução de integral pelo método de substituição, tem uma boa conceção operacional do conceito de integral de uma função, particularmente pelo método de substituição. O aluno consegue usar regras e fórmulas de integrais e aplica-las na resolução da questão, portanto, tem um nível de compreensão do conceito de integral de uma função instrumental.

Resposta à questão 13 (Figura 0.82).

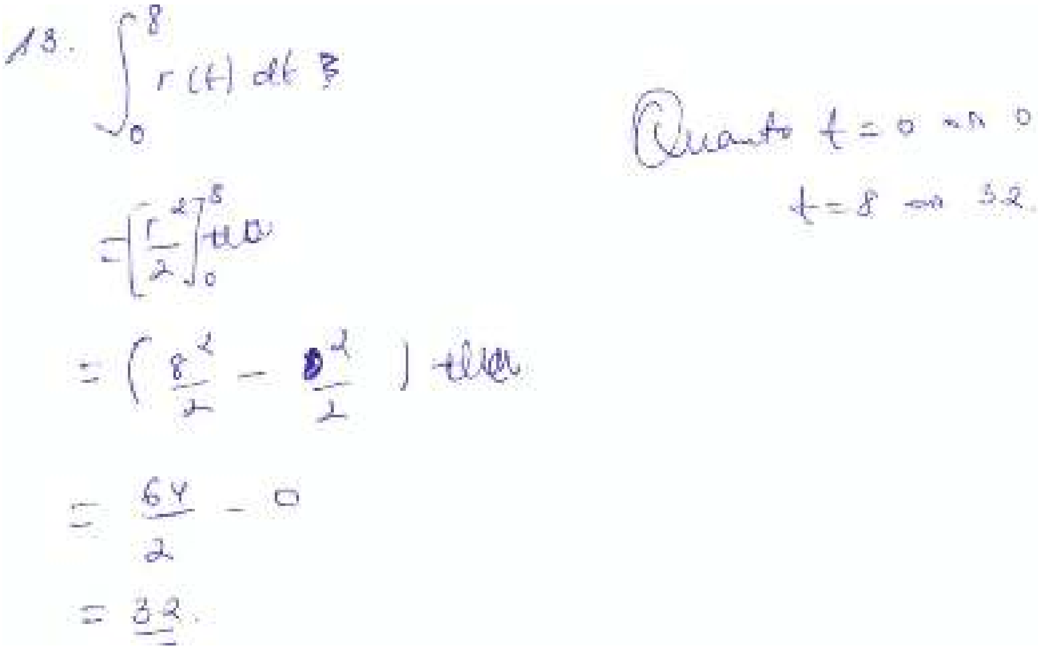


Figura 0.82 Resposta à questão 13 (Amaro)

A resposta que o aluno apresenta é um forte indicador de que, no que toca à integração, há um forte domínio de procedimentos em detrimento de conceitos, pois mesmo não sendo possível efetuar uma resolução algébrica, os alunos forçam-na, como se fosse a única saída. Claro está que esta questão é de interpretação, onde o integrando, $r(t)$, está dado de maneira genérica, portanto, não é possível calcular a integral. A resposta que se procura é uma descrição do que representaria o resultado, em caso de cálculo. Sendo a integral geometricamente interpretada como a área da superfície delimitada pela curva, pelo eixo das abscissas e pelas retas $t = 0$ e $t = 8$, a integral $\int_0^8 r(t)dt$ representa o consumo de petróleo do ano 2000 ao ano 2008. O aluno tem dificuldade em relacionar, conforme descreve Tall (1992), problemas do mundo real com o conceito de integral de uma função. Pela abordagem à questão feita pelo aluno, podemos inferir que tem um nível de compreensão do conceito de integral de uma função instrumental.

O Amaro, no que diz respeito aos conceitos que tem e à capacidade de descrevê-los, o de integração é dominado mecanicamente. Quanto às representações algébrica, geométrica, e numérica, apresenta uma abordagem mais procedimental, permitindo-nos inferir que tem uma estrutura mental a nível de processo, quanto à Teoria APOS, e que está na fase de condensação, quanto à Teoria da Reificação. Quanto às dificuldades descritas por Tall (1992), e tendo em conta o seu desempenho na questão 13, tem dificuldades em relacionar problemas do mundo real com o conceito de integral de uma função. Portanto, no que diz respeito ao conceito de integral de uma função, podemos considerar que o aluno tem um nível de compreensão do conceito de integral de uma função instrumental.

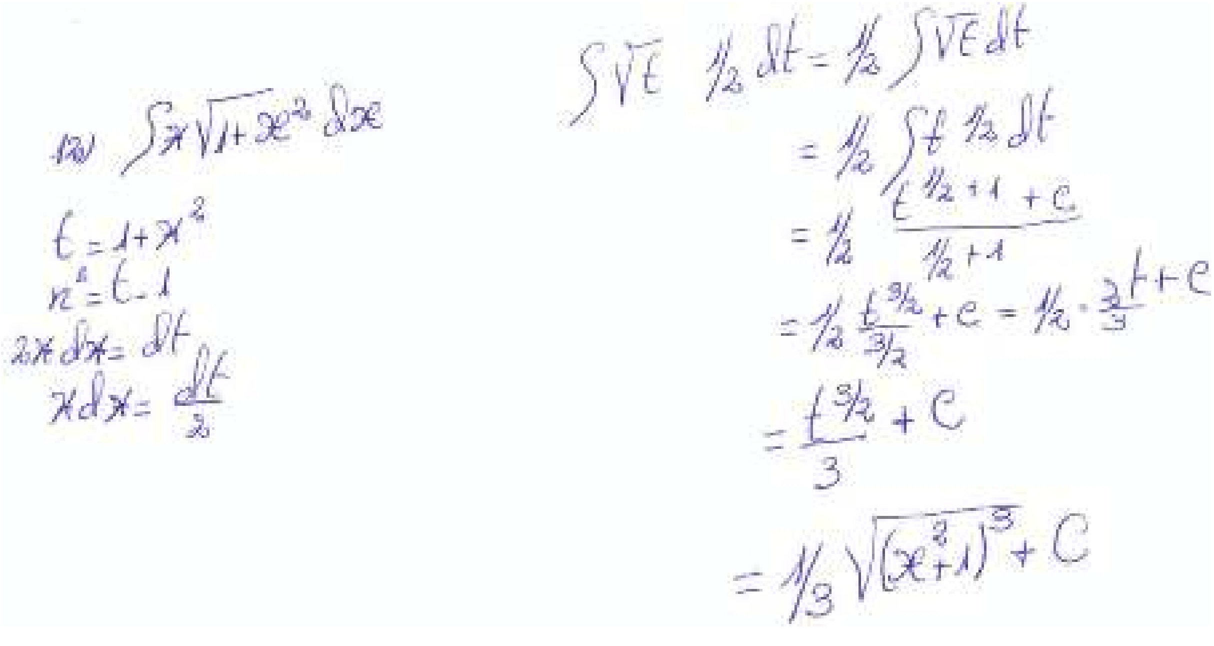
3.1.3.4 Ana

Resposta à questão 11 (Figura 0.83).

Figura 0.83 Resposta à questão 11 (Ana)

No que diz respeito ao conceito que tem de integração, bem como à capacidade de descrição, apresenta uma ideia incompleta. Apresenta a derivabilidade e não a continuidade como condição para que uma função seja integrável num intervalo, o que mostra dificuldade de relacionar adequadamente conceitos da integração de uma função. A entrevista não contribui o suficiente para mudar o sentido da resposta. A aluna apresenta um nível de compreensão do conceito de integral de uma função incipiente.

Resposta à questão 12 (Figura 0.84).



$$12)\ \int x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$t = 1+x^2$$
$$x^2 = t-1$$
$$2x\,dx = dt$$
$$x\,dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int \sqrt{t}\ \tfrac{1}{2}\,dt = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt$$
$$= \tfrac{1}{2}\int t^{1/2}\,dt$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{t^{1/2+1}+C}{1/2+1}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{t^{3/2}}{3/2}+C = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}t+C$$
$$= \frac{t^{3/2}}{3}+C$$
$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$$

Figura 0.84 Resposta à questão 12 (Ana)

Procedimentalmente resolve corretamente o exercício. A aluna mostra um bom domínio do procedimento de resolução. A aluna tem capacidade de aplicar regras e fórmulas de integrais na resolução de uma integral por substituição, revelando uma boa conceção operacional e um nível de compreensão do conceito de integral de uma função instrumental.

Resposta à questão 13 (Figura 0.85).

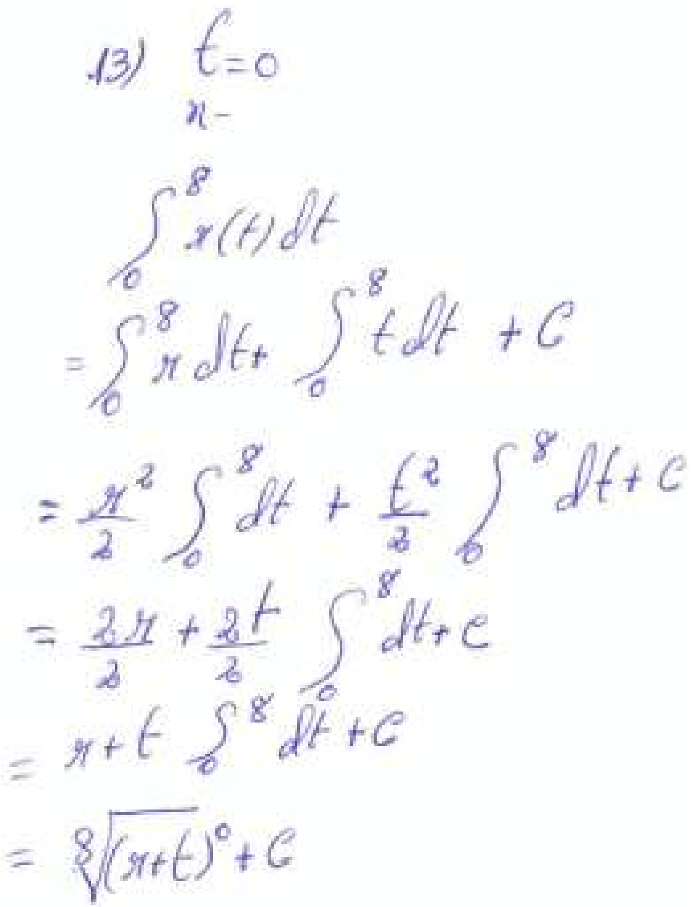


Figura 0.85 Resposta à questão 13 (Ana)

A resposta que a aluna apresenta (Figura 0.85) é mais um indicador de que, quanto à integração, há mais domínio de procedimentos do que de conceitos. A aluna procura resolver algebricamente, quando se espera uma resolução por via de interpretação. A aluna revela o que Tall (1992) descreve como dificuldade em relacionar problemas do mundo real com conceitos do Cálculo Integral de maneira apropriada. Pela abordagem à questão feita pela aluna, podemos inferir que tem um nível de compreensão do conceito de função instrumental.

A Ana, no que diz respeito aos conceitos que tem e à capacidade de descrevê-los, o de integral de uma função é dominado de forma procedimental, o que, em situações um pouco fora de procedimentos com que está familiarizada, a remete a uma situação de dificuldade de prosseguimento. Quanto às teorias APOS e da Reificação, podemos inferir que tem uma estrutura mental a nível de processo e que está na fase de condensação, respetivamente. Quanto ao nível de compreensão do conceito de integral de função, podemos descrevê-la como tendo um nível essencialmente instrumental.

3.1.3.4 Armindo

Resposta à questão 11 (Figura 0.86).

Figura 0.86 Resposta à questão 11 (Armindo)

A ideia fica por completar tanto no questionário como na entrevista. Apresenta a derivabilidade e não a continuidade como condição para que uma função seja integrável num intervalo, mostrando dificuldade em relacionar adequadamente subconceitos do conceito de integral de uma função. Podemos afirmar que a aluna tem um nível de compreensão do conceito de integral de uma função incipiente.

Resposta à questão 12 (Figura 0.87).

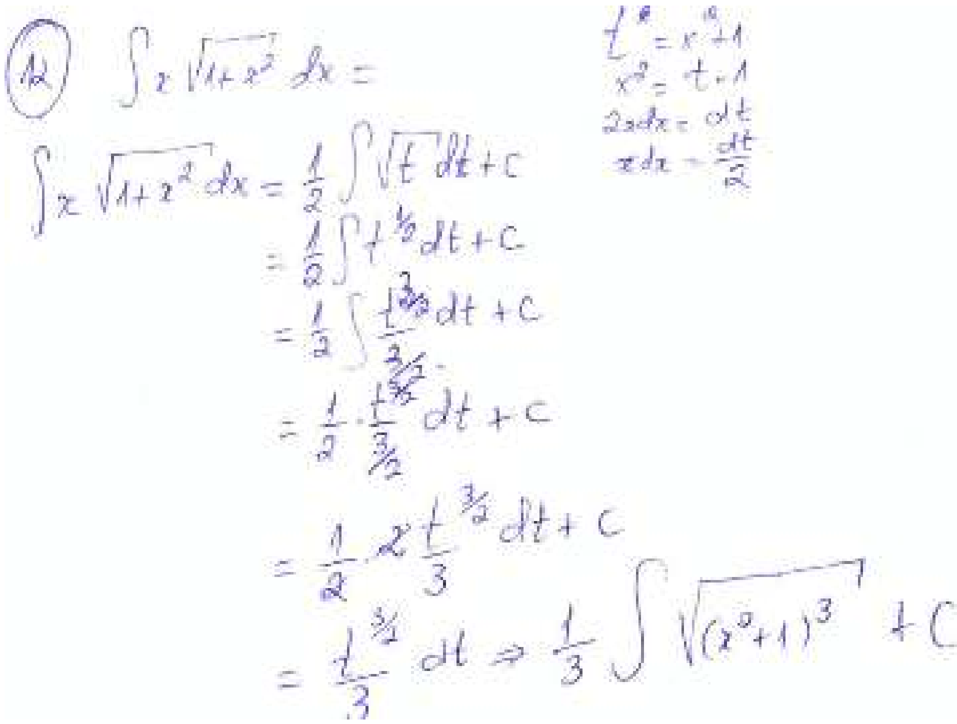


Figura 0.87 Resposta à questão 12 (Armindo)

Com alguma confusão nos símbolos — depois de integrar preserva o dt e, no resultado final, mantém o símbolo de integração — o aluno chega ao resultado final. Em $\frac{1}{2}\int \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} dt + C$, depois de ter aplicado a fórmula de integral, preserva o símbo de integração e o diferencial de t, dt. No passo seguinte retira o símbolo de integração, mas no resultado final o símbolo de integração volta a aparecer. O aluno mostra dificuldade em identificar onde colocar o símbolo de integração, embora use os procedimentos de integração corretamente. O aluno tem dificuldades na notação, considerando a descrição de Tall (1992), é o mesmo que dizer que o aluno tem dificuldade em selecionar e usar representação apropriada. Portanto, podemos afirmar que o aluno tem um nível de compreensão do conceito de integral de uma função essencialmente instrumental.

Resposta à questão 13 (Figura 0.88).

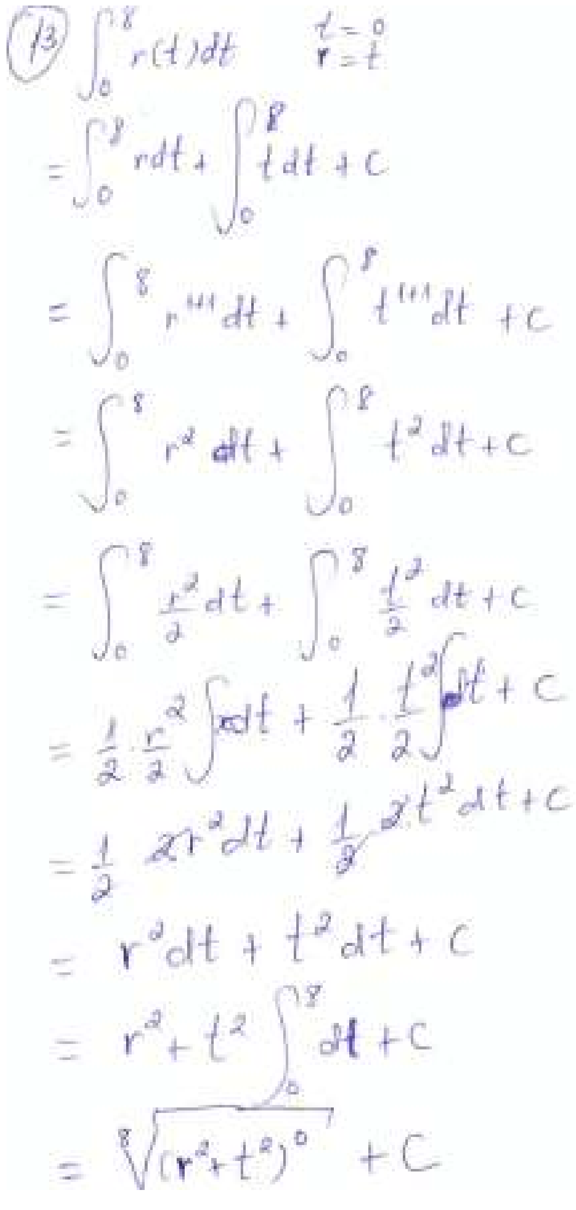


Figura 0.88 Resposta à questão 13 (Armindo)

Nesta resposta (Figura 0.88), repete-se o quadro verificado com os demais alunos. Há um forte domínio de procedimentos em detrimento de conceitos, a conceção operacional sobrepõe-se à estrutural. Mais uma vez nota-se o aluno a tentar resolver algebricamente em vez de simplesmente apresentar uma descrição da sua representação. É uma abordagem procedimental da questão, é um desempenho a nível de processo. É uma dificuldade, descrital por Tall (1992), em relacionar problemas do mundo real com conceitos do Cálculo Integral. Por tanto podemos afirmar que o aluno tem um nível de compreensão do conceito de integral de uma função instrumental.

O Armindo, em relação ao conceito que tem e à capacidade de descrição do que faz, consegue apresentar o conceito de integração de maneira incompleta. Tem uma compreensão sequencial dos procedimentos de integração. Quanto às teorias APOS e da Reificação, o aluno tem uma estrutura mental a nível de processo e tem uma conceção na fase de condensação, respetivamente. O aluno tem um nível de compreensão do conceito de integral de uma função instrumental.

3.1.3.6 Edson

Resposta à questão 11 (Figura 0.89).

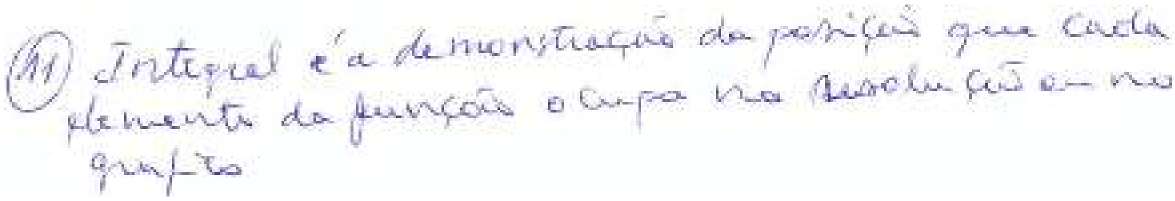


Figura 0.89 Resposta à questão 11 (Edson)

Apresenta (Figura 0.89) uma definição confusa e bastante afastada da definição de integral de uma função, o que também se verifica — se repete — na descrição verbal ao longo da entrevista. Para além de desarticulados, os conceitos que apresenta, na sua maioria (demonstração, posição de cada elemento de função, resolução), não são associáveis à definição de integral de uma função. Tendo em conta Tall (1992), o aluno tem uma fraca imagem mental do conceito de integral de uma função. O aluno tem um nível de compreensão do conceito de integral de uma função incipiente.

Reposta à questão 12 (Figura 0.90).

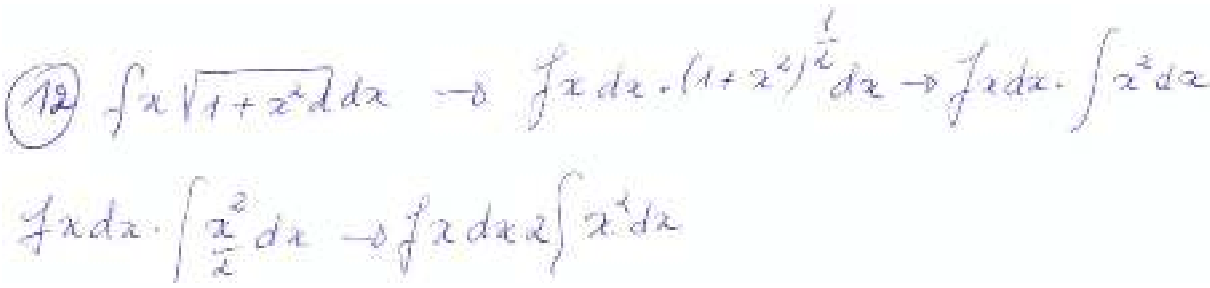


Figura 0.90 Resposta à questão 12 (Edson)

O aluno faz uma confusão total entre o símbolo de integral e o símbolo de função, trata-se de uma resolução que evidencia falta de domínio do procedimento de cálculo da integral. O desempenho é tão confuso quanto a definição que apresenta de integral de uma função, os conceitos são operacionalizados de maneira desconexa. Tendo em conta a descrição de Tall (1992) sobre as dificuldades na aprendizagem do Cálculo, o aluno tem dificuldade em selecionar e usar representações apropriadas, bem como na manipulação algébrica. Portanto, o aluno tem um nível de compreensão incipiente sobre o conceito de integral de uma função

Resposta à questão 13. Questão sem resposta e sem acréscimos na entrevista. Uma implicação imediata da não resposta a esta questão é, de acordo com a descrição de

Tall (1992), a dificuldade do aluno em traduzir problemas do mundo real em formulação do Cálculo. As dificuldades reveladas pelo aluno nas resoluções das questões 11 e 12 também estão na base da não resolução da questão 13. Portanto, o nível de compreensão do conceito de integral de uma função revelado pelo aluno é incipiente.

O Edson, no que diz respeito ao conceito que tem, bem como à capacidade de descrição do que faz, está ao nível de ação. Quanto às teorias APOS e da Reificação, o aluno tem uma estrutura mental a nível de ação e tem uma conceção na fase de condensação, respetivamente. O aluno tem um nível de compreensão do conceito de integral de uma função incipiente.

3.1.3.7 Eduardo

Este aluno não responde a qualquer questão sobre integração tanto no questionário quanto na entrevista. No mesmo questionário (Apêndice 3: Questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos), na primeira e segunda partes, função e diferenciação respetivamente, o aluno apresenta um nível de compreensão dos conceitos incipiente. A incipiência, na primeira parte do questionário, assenta em ter um raciocínio covariacional — conforme descrito por Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008) — reduzido apenas à ação mental 1, na segunda parte, assenta em, por dificuldades anteriores não conseguir responder a qualquer questão. Portanto, a não resposta do aluno na terceira parte revela um nível incipiente de compreensão do conceito de integral de uma função.

3.1.3.8 Efigénio

Resposta à questão 11 (Figura 0.91).

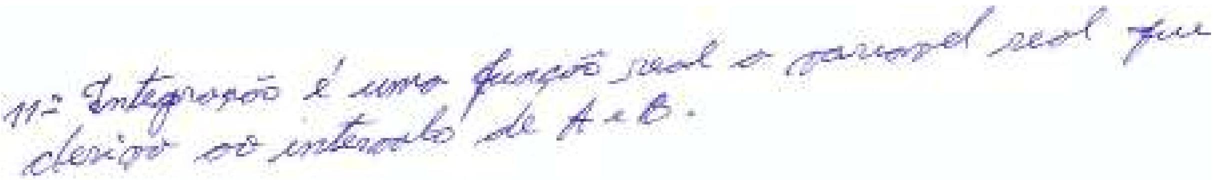


Figura 0.91 Resposta à questão 11 (Efigénio)

Na única resposta que dá às questões de integração do questionário, o aluno apresenta uma ideia incompleta ao tentar definir integral de uma função. Volta a apresentar problemas no conceito, por exemplo na referência a intervalos numéricos, e os subconceitos não são adequadamente relacionados. O fraco desempenho deve-se à profundidade com que se constata as dificuldades na aprendizagem do Cálculo descritas por Tall (1992) e um raciocínio covariacional, segundo Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008), reduzido à ação mental 1 no desempenho apresentado nas resoluções das questões anteriores do questionário. Portanto, o aluno tem um nível de compreensão do conceito de integral de uma função incipiente.

3.1.3.9 Elias

Resposta à questão 11 (Figura 0.92).

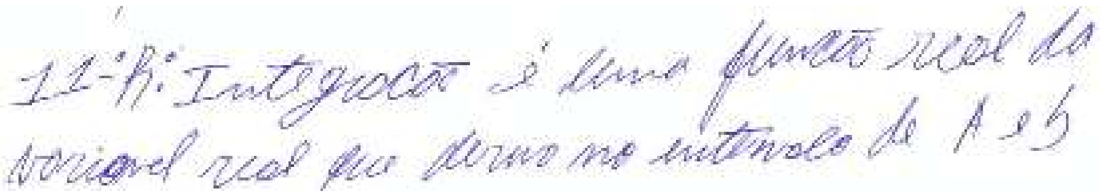


Figura 0.92 Resposta à questão 11 (Elias)

A ideia apresentada é incompleta, apresenta problemas na representação de intervalo numérico e os conceitos não são adequadamente relacionados. O aluno tem um nível de compreensão do conceito de integral de uma função incipiente.

Resposta à questão 12 (Figura 0.93).

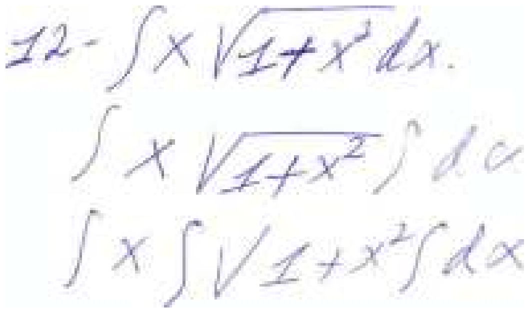


Figura 0.93 Resposta à questão 12 (Elias)

Ao considerar $\int x\sqrt{1+x^2}dx = \int x\sqrt{1+x^2}\int dx = \int x\int\sqrt{1+x^2}\int dx$ o aluno considera que $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)\int g(x)\int dx$, integral do produto é igual ao produto das integrais, regra que não existe. Além disso, o aluno não associa dx, o diferencial de x, a cada uma das funções que considera como fatores do integrando, mostrando dificuldades no conceito de diferencial de uma função. O aluno não aplica corretamente nenhuma regra ou fórmula de integral que nos permita confirmar algum conhecimento seu neste sentido. Quanto às teorias APOS e da Reificação, o aluno tem uma estrutura mental a nível de ação e tem uma conceção na fase de interiorização. Portanto, o aluno apresenta um nível de compreensão do conceito de integral de uma função incipiente.

3.1.3.10 Emanuela

A aluna não responde a qualquer questão da parte integração tanto no questionário quanto na entrevista. No mesmo questionário (Apêndice 3: Questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos), na primeira e segunda partes, função e diferenciação respetivamente, a aluna, por via de algumas verbalizações em entrevista, apresenta um nível de compreensão dos conceitos incipiente. Podemos inferir que quanto às teorias APOS e da Reificação a aluna tem compreensão nos seus níveis iniciais, ação e interiorização, respetivamente. Podemos inferir também que a não resposta da aluna na terceira parte revela um nível incipiente de compreensão do conceito de integral de uma função.

3.1.3.11 Conclusões sobre o conceito de integração

É notório o reflexo do acúmulo de dificuldades nos alunos. Quantas mais dificuldades apresentadas nas secções Função e Diferenciação do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3), maiores as dificuldades apresentadas na secção Integração. Todos os alunos refletiram nos seus desempenhos as dificuldades apresentadas nas duas secções anteriores. Apesar disso, importa destacar o desempenho de três deles: Amarildo, Amaro e Ana. Estes, também pelo facto de menos dificuldades terem apresentado nas duas secções anteriores, apresentam melhores desempenhos na presente secção.

Tabela 16: Estrutura cognitiva associada ao conceito de integração

Aluno	Representação algébrica			Representação numérica			Representação gráfica		
	Ação	Processo	Objeto	Ação	Processo	Objeto	Ação	Processo	Objeto
Alexandra	X			X			X		
Amarildo		X		X				X	
Amaro		X		X				X	
Ana		X		X			X		
Armindo		X		X			X		
Edson	X			X			X		
Eduardo	X			X			X		
Efigénio	X			X			X		
Elias	X			X			X		
Emanuela	X			X			X		

3.1.4 Síntese da caraterização dos alunos

Notamos que nos alunos com desempenho a nível de ação — tanto no conceito de função, no de derivada, como no de integral — predomina uma visão algorítmica, predomina uma visão mostrativa em detrimento de uma demonstrativa da Matemática, predomina uma visão particular ou pontual em vez de uma visão genérica dos conceitos matemáticos, regista-se lacunas das formações nos níveis anteriores de ensino, regista-se uma visão descontextualizada do Cálculo. Todos os aspetos indicados associados às dificuldades intrínsecas aos objetos matemáticos contribuíram para o baixo desempenho dos alunos.

Em relação aos alunos com desempenho a nível de processo ou de objeto, nos três conceitos estudados, notámos algum desprendimento da visão algorítmica, da visão sequencial nas suas resoluções, bem como nas suas declarações em entrevistas e em intervenções feitas na sala de aula. A visão mostrativa ainda supera a demonstrativa. A unidade curricular Matemática I, não sendo de especialidade, está estruturada sem muitas demonstrações — é essencialmente Cálculo Informal, como designa Tall (1992) — o que contribuiu para que a visão mostrativa prevalecesse sobre a demonstrativa. A capacidade de generalização dos alunos Amarildo, Amaro e Ana era superior à daqueles a nível de ação, porquanto conseguiam reconhecer a necessidade de aplicação de determinado conceito em várias circunstâncias. As dificuldades intrínsecas aos objetos matemáticos, apesar de que menos devido às suas melhores habilidades, também influenciaram no desempenho dos alunos.

Os alunos com os quais se prosseguiu o estudo são o Amarildo, o Amaro e a Ana. Os três estão mais frequentemente a nível de processo e ou de objeto dependentemente do conceito considerado. Constatámos que, de maneira geral, reúnem os requisitos necessários para frequentar a unidade curricular Matemática I, o que nos garante melhores resultados no nosso estudo. Constatámos também que reúnem qualidades — assiduidade, pontualidade e dedicação — que facilitam a sua aprendizagem, bem como o desenvolvimento do estudo. Além disso teve-se em conta a necessidade de se dar profundidade às abordagens através do foco em três alunos e evitando-se repetições consequentes de semelhanças entre os alunos.

Tabela 17: Síntese da caraterização dos alunos. Em destaque os alunos com os quais se continuou o estudo

Aluno	Função			Derivação			Integração		
	Ação	Processo	Objeto	Ação	Processo	Objeto	Ação	Processo	Objeto
Alexandra	X			X			X		
Amarildo		X			X			X	
Amaro		X			X			X	
Ana		X		X			X		
Armindo	X			X			X		
Edson	X			X			X		
Eduardo		X		X			X		
Efigénio	X			X			X		
Elias	X			X			X		
Emanuela	X			X			X		

3.2 Provas parcelares

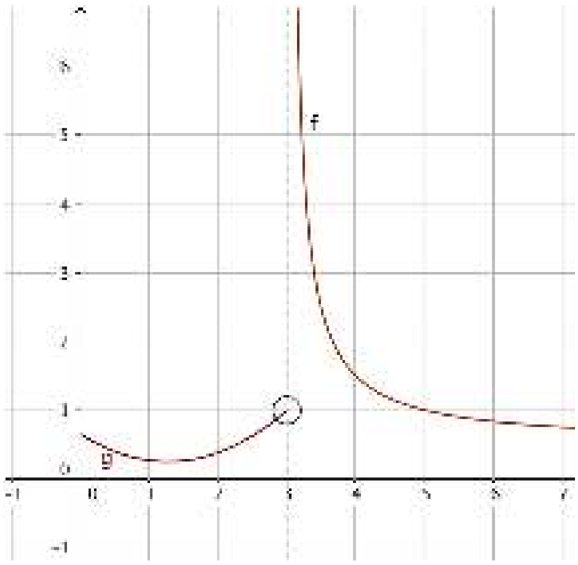
A primeira prova parcelar (0) tinha três questões. A primeira sem alíneas, a segunda com duas alíneas e a terceira com três alíneas. A segunda prova parcelar (0) tinha também três questões, sendo a primeira com três alíneas e as demais sem alíneas. Os enunciados de ambas avaliações podem ser encontrados nos anexos desta tese. Os conteúdos avaliados nas duas provas parcelares são sucessão, função e cálculo diferencial. Os conteúdos de cálculo integral foram lecionados depois da aplicação da segunda prova parcelar e, portanto, avaliados depois no exame, bem como noutras avaliações individuais e coletivas feitas depois da segunda prova parcelar. Os três alunos selecionados, por obterem uma média igual ou superior a 14 valores, foram, à luz do regulamento académico em vigor na instituição, dispensados do exame. Os três alunos qualitativamente são bons e dos melhores da turma. As provas parcelares não foram elaboradas pensando somente neles, mas também nos outros alunos da turma com nível de aproveitamento académico que se distribuiu pelo bom, suficiente, medíocre e mau.

As provas foram feitas em folhas A4 brancas e a captação das imagens pelo investigador foi feita antes da correção realizada pela professora que lecionava a unidade curricular. Desta forma, por ser a folha toda branca e por se antecipar à correção da professora, preveniu-se a existência de poluição visual nas imagens captadas.

Os conteúdos avaliados estavam dentro dos lecionados pela professora. Descarta-se, assim, qualquer dificuldade na prestação de provas decorrente de incoerência entre os conteúdos lecionados e os avaliados.

As questões da primeira prova parcelar consideradas são as seguintes:

- Sabendo que o primeiro termo de uma progressão aritmética é -3 e a razão é 6, calcule o 18.º termo da sucessão.
- Dado o gráfico



a) Analisar se existe continuidade no ponto $\mathrm{x} = 3$;

b) Caso exista, indicar o tipo de descontinuidade.

- Calcular:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2-2}{2n^3-1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{2x-2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$.

As questões da segunda prova parcelar consideradas são as seguintes:

1. Derive as funções seguintes:

a) $f(x) = 4x^6 - \sin x + x\cos x$;

b) $y = \frac{4x-5}{x-2}$;

c) Achar y' para $3x + e^{xy} - 3y = 0$.

2. Determine a equação da reta tangente à curva $f(x) = x^4 + x$ em $x = 3$.
3. Dada a função que representa o custo de um produto de uma fábrica A. Determine o custo marginal para $x = 4$.

$$c(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 10$$

3.2.1 Amarildo

Resposta à questão 1 (Figura 0.94) da 1.ª prova parcelar.

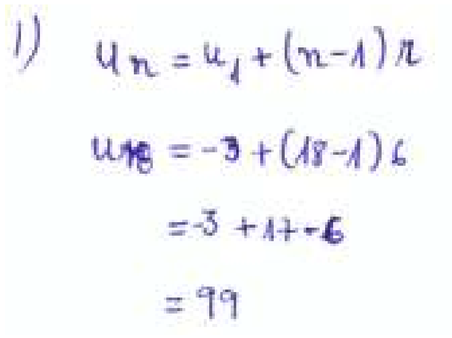


Figura 0.94 Resposta à questão 1 da 1.ª prova parcelar (Amarildo)

O aluno começa a resolução (Figura 0.93) apresentando a fórmula que lhe permite tal feito: a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética. A seguir substitui nela os elementos u_1, n e r e obtém u_{18}. Os elementos da fórmula estão bem identificados e relacionados na fórmula, o que permitiu, através de operações aritméticas elementares, chegar ao valor de u_{18}.

Resposta à questão 2 (Figura 0.95) da 1.ª prova parcelar.

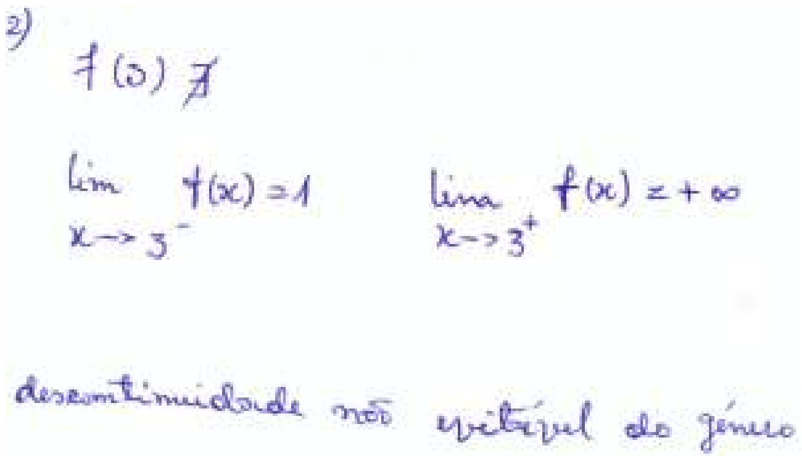


Figura 0.95 Resposta à questão 2 da 1.ª prova parcelar (Amarildo)

Nesta questão (Figura 0.95), sabe-se que para que uma função seja contínua num ponto a condição é que a sua imagem e o seu limite sejam iguais no mesmo ponto, ou seja, $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Para que o limite de $f(x)$ exista é necessário e suficiente que os seus limites laterais também existam e sejam iguais, ou seja, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se e só se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$. O aluno evidencia a não existência da imagem da função no ponto 3, apresentando a expressão $f(3)\nexists$ e também apresenta os limites laterais com valores diferentes $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$, provas de que a função não é contínua no ponto $x = 3$. Com esta resolução, o aluno mostra capacidade de algebrizar um problema dado graficamente e capacidade de fundamentar aquilo que graficamente já é visível.

Em relação à classificação da descontinuidade, em Matemática I considera-se três casos: (1) quando os limites laterais são finitos e diferentes, a descontinuidade é essencial do 1.º género; (2) quando pelo menos um dos limites laterais é infinito, a descontinuidade é essencial do 2.º género; (3) quando a função tem limite, mas é diferente da sua imagem no ponto em análise, a descontinuidade é evitável. A resposta do aluno é “descontinuidade não evitável do género”. A classificação só pode ser uma de três, portanto, é única. Na sua resposta, o aluno apresenta elementos de duas classificações distintas. O aluno compreende que há uma descontinuidade, mas tem dificuldades em relacionar os seus critérios de classificação, portanto, revela um nível de compreensão do conceito instrumental. Em relação às teorias APOS e da Reificação revela ter a estrutura mental a nível de processo e ter uma compreensão concetual na fase de condensação, respetivamente.

Resposta à questão 3 (Figura 0.96) da 1.ª prova parcelar.

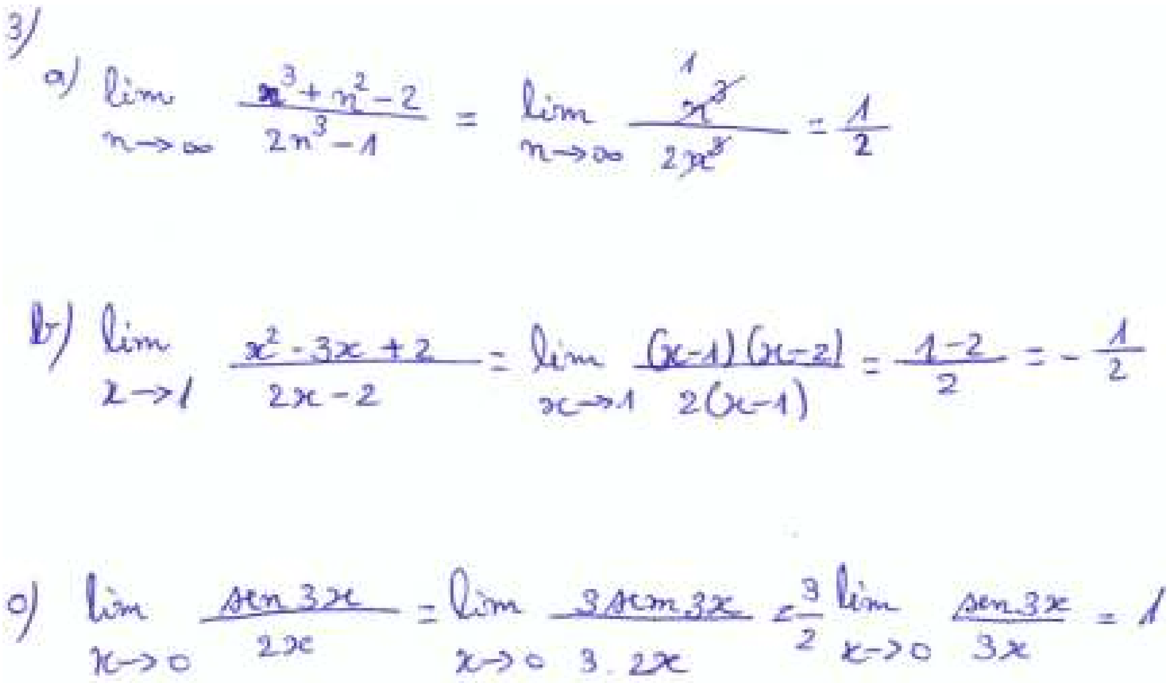


Figura 0.96 Resposta à questão 3 da 1.ª prova parcelar (Amarildo)

Nas resoluções da questão 3 (Figura 0.96) é notória a síntese com que o aluno manipula a sucessão e as funções para o cálculo dos seus limites, suprimindo o passo de identificação das indeterminações. No limite de sucessão rapidamente substitui a expressão dada por uma equivalente e obtém o resultado logo a seguir. No limite do quociente de dois polinómios, decompõe ambos e sem dificuldades chega ao resultado correto. Na alínea c) sabe transformar a expressão de modo a pôr em evidência o limite fundamental trigonométrico, tendo cometido a falha de não considerar o coeficiente $\frac{3}{2}$ na obtenção do resultado final. O aluno apresenta um bom desempenho algébrico e, do ponto de vista operacional, boa compreensão dos conceitos — sucessão, limite de sucessão, função, limite de função — envolvidos e suas relações. O aluno apresenta uma boa conceção operacional. O aluno apresenta um nível de compreensão do conceito de limite de função relacional. Quanto às teorias APOS e da Reificação, revela ter uma estrutura mental a nível de processo e ter uma compreensão concetual na fase de reificação, respetivamente.

Em relação à segunda prova parcelar, o Amarildo mantém-se ao nível das avaliações anteriores. Comete alguns erros, os mesmos são indicados e comentados.

Resposta à questão 1a) (Figura 0.97) da 2.ª prova parcelar.

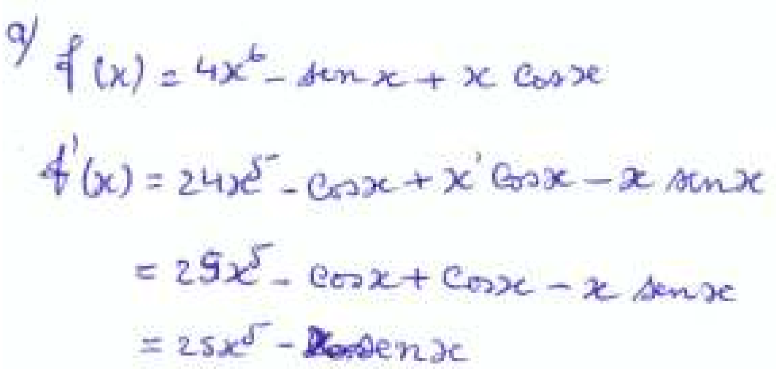


Figura 0.97 Resposta à questão 1a) da 2.ª prova parcelar (Amarildo)

Na sequência da resolução apresentada na questão 8 do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Figura 0.52), na resolução da questão 1a) da 2.ª prova parcelar (Figura 0.97), o aluno consolida o seu bom desempenho algébrico na derivação de funções compostas. A presente resolução envolve as regras do produto, da cadeia e da soma, bem como fórmulas de funções polinomiais (no caso concreto, de potências) e trigonométricas. O bom desempenho do aluno consiste em relacioná-las corretamente numa mesma resolução.

Resposta à questão 1b) (Figura 0.98) da 2.ª prova parcelar.

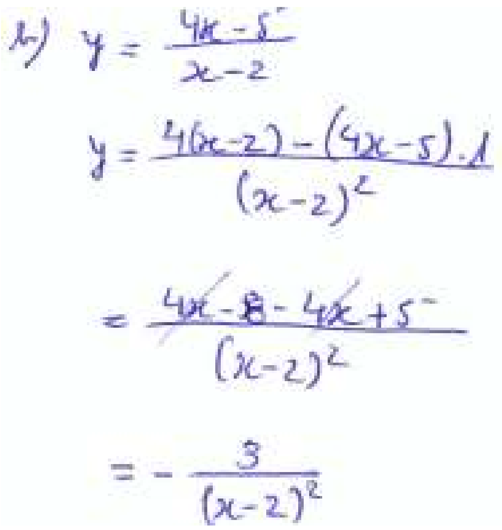


Figura 0.98 Resposta à questão 1b) da 2.ª prova parcelar (Amarildo)

Na resolução da questão 1b) da 2.ª prova parcelar (Figura 0.98), o aluno mantém um bom desempenho. Desta vez, relaciona bem na mesma resolução a regra do quociente, a regra da soma e fórmula de potências. Tanto na alínea a) como na b) da questão 1, o aluno mostra capacidade de coordenar o conhecimento que tem, considerando novos elementos e apresentando resoluções mais complexas.

Resposta à questão 1c) (Figura 0.99) da 2.ª prova parcelar.

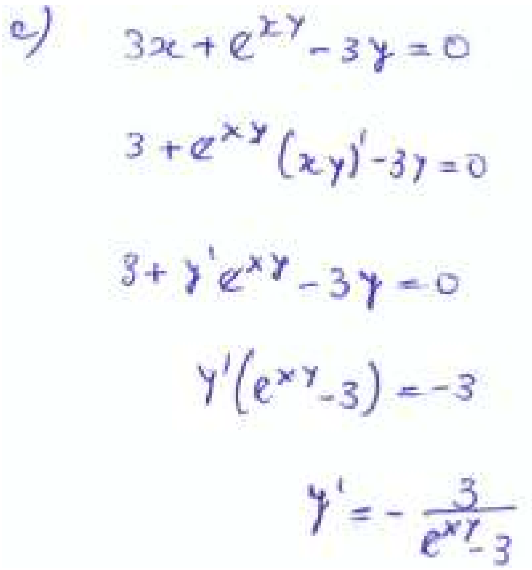


Figura 0.99 Resposta à questão 1c) da 2.ª prova parcelar (Amarildo)

No segundo passo da questão 1c) (Figura 0.99), o aluno considera $(3x)' = 3$. No mesmo passo a derivada de xy não está correta, o aluno considera $(xy)' = y'$ em vez de $(xy)' = x'y + xy' = y + xy'$. Ainda neste passo, a parcela $3y$ mantém-se inalterada. Notamos que nas parcelas em que consta a variável dependente y, o aluno apresenta dificuldades em derivar. O conceito de y como função composta, numa função dada implicitamente, não está interiorizado pelo aluno, falta-lhe este conceito para relacionar corretamente os elementos que fazem parte da questão. No contexto das funções implícitas, o aluno ainda não compreende a classificação de x e y como variáveis relacionadas, conforme o modelo 3UV de Trigueros & Usini (2003) classifica. O aluno revela dificuldade em absorver nova ideia complexa num tempo limitado, conforme descreve Tall (1992). O aluno revela um nível de compreensão do conceito de derivada de uma função instrumental.

Resposta à questão 2 (Figura 0.100).

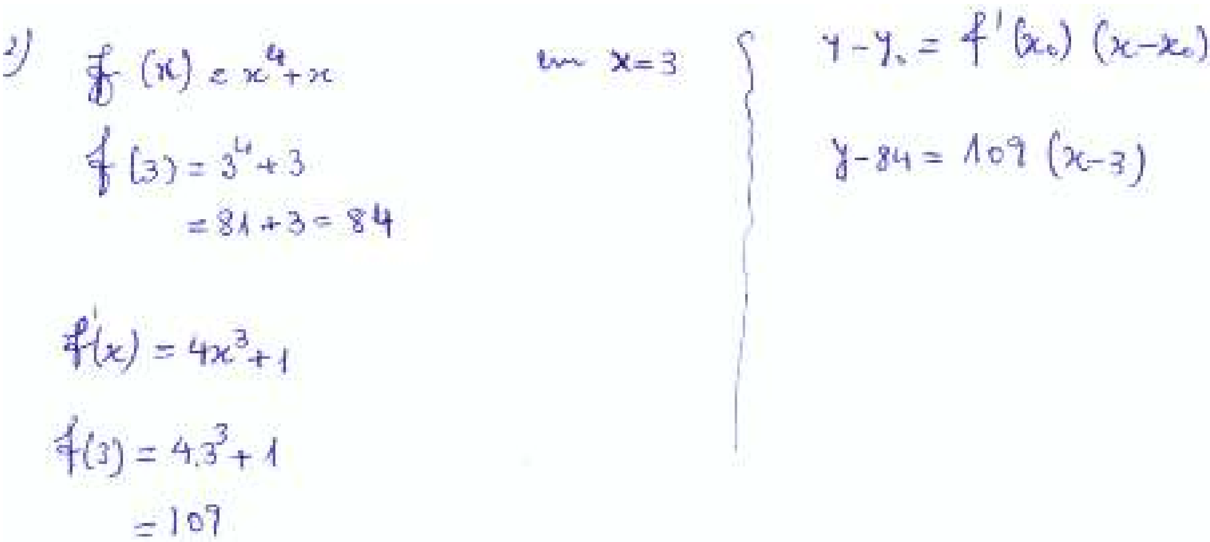


Figura 0.100 Resposta à questão 2 da 2.ª prova parcelar (Amarildo)

O aluno apresenta (Figura 0.100) um bom desempenho algébrico na resolução deste exercício típico do cálculo diferencial, o da equação da reta tangente a uma curva num ponto dado. O aluno relaciona bem o bom desempenho algébrico que tem com regras e fórmulas de derivada com a equação da reta tangente, $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Resposta à questão 3 (Figura 0.101).

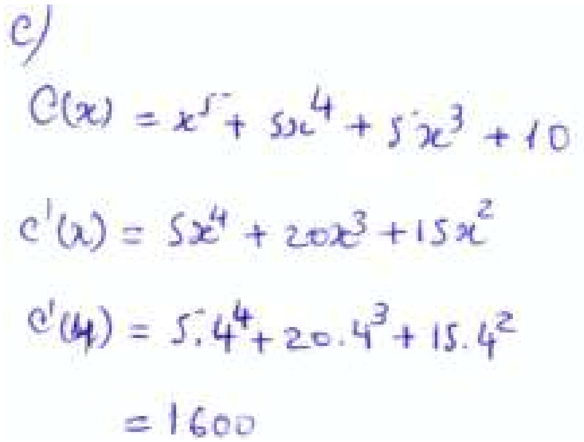


Figura 0.101 Resposta à questão 3 da 2.ª prova parcelar (Amarildo)

A resolução da questão 3 (Figura 0.101) está correta. Do ponto de vista puramente do Cálculo Diferencial, é uma questão com um grau de dificuldade inferior ao das questões anteriores desta 2.ª prova parcelar, ou seja, a resolução da questão requer apenas relacionar a regra da derivada da soma de duas ou mais funções, bem como a fórmula da derivada da potência. O que a questão tem de diferente é que é aplicada à Economia. Na resolução, tal como já aconteceu nas questões anteriores, o aluno mostra bom desempenho algébrico, uma boa conceção operacional.

Trata-se de um aluno com frequência às aulas muito alta e cumpridor das suas obrigações, portanto, bastante assíduo e dedicado. Tem o hábito de tomar apontamentos comentados, ou seja, toma os apontamentos escritos ou ditados pela professora e, conforme esta vai explicando, comenta por escrito, a esferográfica ou a lápis, ao redor dos seus apontamentos. Podemos constatar, tanto pela observação feita nas aulas como nas respostas dadas nas entrevistas, que as dúvidas que apresenta normalmente são consequência dos comentários que vai fazendo. Ao fazer comentários dos seus conteúdos por sua própria iniciativa e ao colocar questões resultantes de tais comentários, o aluno contribui significativamente para aceleração da sua assimilação, para aceleração da passagem por mecanismos mentais, e o alcance de estruturas mentais.

No que diz respeito à participação na investigação sempre esteve disponível e reagiu positivamente às iniciativas do investigador. Notava-se que o seu discurso era muito apoiado nos seus comentários, ou seja, na sua "própria" produção feita ao longo das aulas e ao longo dos seus estudos feitos em casa. Às vezes era preciso conciliar a terminologia de tal discurso com a do investigador que era a terminologia tecnicamente correta.

O nível de conhecimento apresentado ao longo da investigação era claramente evolutivo, as notas obtidas nas avaliações parcelares, bem como noutras avaliações individuais e coletivas feitas pela professora ao longo das aulas perfizeram uma média final de 15 valores.

Tabela 18 Síntese de caraterização do Amarildo no fim do semestre

Aluno	Função			Derivação			Integração[33]		
	Ação	Processo	Objeto	Ação	Processo	Objeto	Ação	Processo	Objeto
Amarildo		X			X			X	

Pelo que foi exposto acima e sintetizado na tabela (

Tabela 18) sobre o Amarildo, constatamos que há evolução na aprendizagem do mesmo, as suas estruturas mentais estão melhoradas e ou consolidadas com a lecionação da unidade curricular. O nível de preparação do aluno para a frequência da unidade curricular Matemática I — consistindo numa estrutura mental a nível de processo, com capacidade de relacionar com bom desempenho subconceitos dos conceitos de função, derivada de uma função e integral de uma função — reflete-se positivamente na sua aprendizagem da Matemática I.

Um exemplo concreto de aprendizagem é a relação que se pode estabelecer entre o seu desempenho na questão 3 do questionário de caraterização da estrutura cognitiva

[33] Caraterização feita a partir das avaliações individuais e coletivas feitas pela professora após a segunda prova parcelar e antes do exame. Aqui o diálogo com a professora da unidade curricular Matemática I jogou um papel importante. Por não ser uma unidade curricular de especialidade, os alunos com média igual ou superior a 14 valores são dispensados do exame. Este cenário verificou-se nos três alunos, Amarildo, Amaro e Ana.

dos alunos (Apêndice 3) e o seu desempenho na questão 2a) da 1.ª prova parcelar. Notamos que o aluno passa para um nível superior de compreensão de funções de dois ou mais ramos, o aluno relaciona melhor os subconceitos envolvidos no conceito.

Um exemplo concreto de reflexo positivo é o reflexo do seu bom desempenho nas questões de resolução algébrica do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3) no seu bom desempenho nas questões 1a) e 1b) da 2.ª prova parcelar, questões em que se requer a aplicação da regra da cadeia. Nestas duas alíneas o aluno apresenta um conceito imagem relacional da derivada de uma função.

A resolução que o aluno apresenta da questão 1c) (Figura 0.99) reflete uma dificuldade de aprendizagem do aluno, a dificuldade de relacionar o conceito de derivada de uma função com o conceito de função dada na forma implícita. Pelo modelo 3UV — Modelo de 3 Usos da Variável de Trigueros & Usini (2003) —, podemos concluir que a dificuldade está no conceito de variáveis relacionadas que se torna mais complexo quando se trata de funções dadas na forma implícita, onde as variáveis independente e dependente não têm uma separação clara. O conceito de variáveis relacionadas do aluno, no contexto da relação entre derivada de uma função e função implícita, precisa de evoluir, pois, se assim não acontecer, a aprendizagem ficará incompleta. Portanto, na resolução da alínea 1c) o aluno mostra um conceito imagem instrumental da derivada de uma função.

Na resolução da questão 2 da 1.ª prova parcelar (Figura 0.95) o aluno consegue analisar a função sem estar vinculada a uma regra nem dependente de uma fórmula. Tendo em conta a visão de ação e de processo das funções de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008, p. 36) (Tabela 8), consideramos uma visão de processo. Quanto às teorias APOS e da Reificação, o aluno revela uma estrutura mental a nível de processo e revela estar na fase de condensação, respetivamente. O nível e a fase em que o aluno se insere são os mesmos resultantes da aplicação do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos aluno (Apêndice 3), com a diferença de se referirem a conceitos mais amplos e mais profundos, portanto, mais complexos. Essencialmente o aluno mostra um nível de compreensão dos conceitos instrumental.

3.2.2 Amaro

Resposta à questão 1 da 1.ª prova parcelar (Figura 0.102).

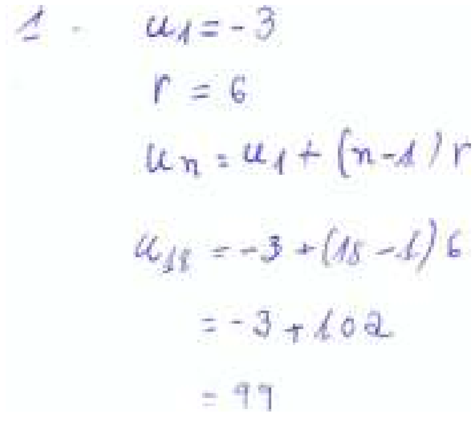


Figura 0.102 Resposta à questão 1 da 1.ª prova parcelar (Amaro)

Na resolução (Figura 0.102) desta questão o aluno apresenta um bom desempenho, conhece a fórmula do termo geral da progressão aritmética e consegue substituir os dados que lhe são fornecidos para encontrar a resposta pretendida.

Resposta à questão 2 da 1.ª prova parcelar (Figura 0.103).

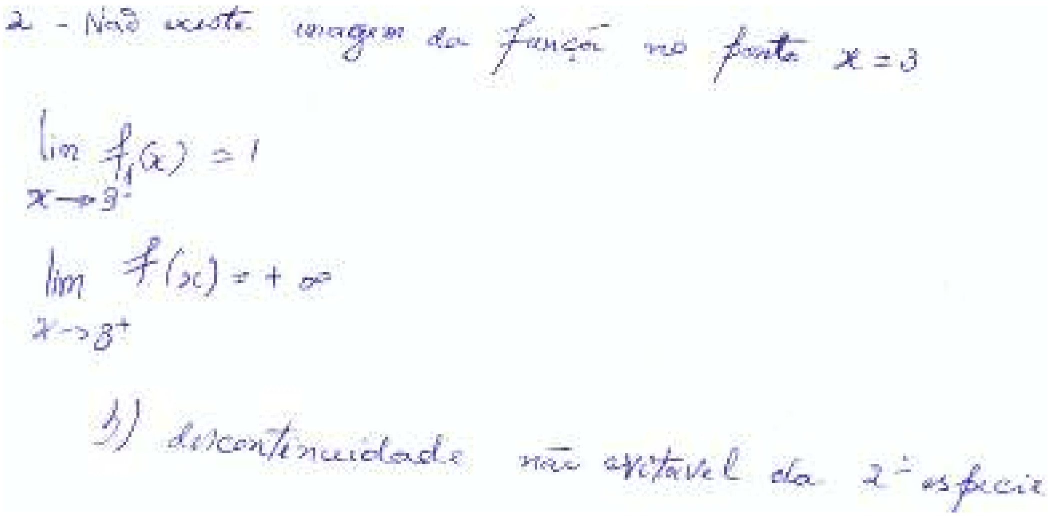


Figura 0.103 Resposta à questão 2 da 1.ª prova parcelar (Amaro)

A resolução da questão 2 (Figura 0.103) revela um bom desempenho do aluno na sua alínea a), conseguindo interpretar corretamente a representação gráfica da função e conseguindo mostrar algebricamente que a função não é contínua no ponto $x = 3$. Em relação à alínea b) o desempenho também é bom, a linguagem apresentada pelo aluno — "descontinuidade não evitável da 2.ª espécie" — não é a pretendida, mas a ideia passada vai ao encontro da classificação pretendida. As descontinuidades podem ser consideradas de dois tipos: (1) evitável e (2) essencial — do 1.º e do 2.º género. Ao dizer "não evitável" inferimos que o aluno esteja a considerar "essencial", o contrário de evitável na classificação dicotómica da descontinuidade que acabámos de ilustrar. Portanto, o raciocínio do aluno tem sustentação e reflete aprendizagem, reflete um nível de compreensão relacional. Quanto às teorias APOS e da Reificação, revela ter uma estrutura mental a nível de objeto e ter compreensão do conceito na fase de reificação, respetivamente.

Resposta à questão 3 da 1.ª prova parcelar (Figura 0.104, Figura 0.105 e Figura 0.106)

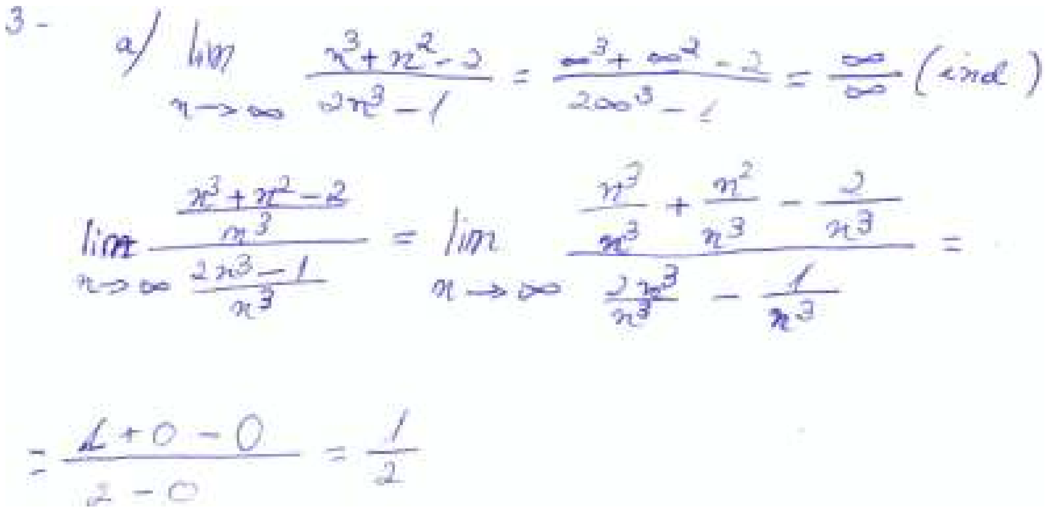


Figura 0.104 Resposta à questão 3a) da 1.ª prova parcelar (Amaro)

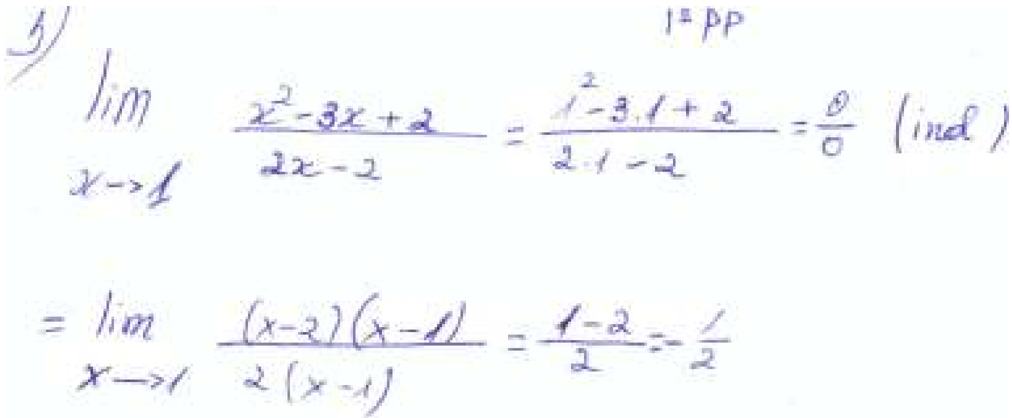


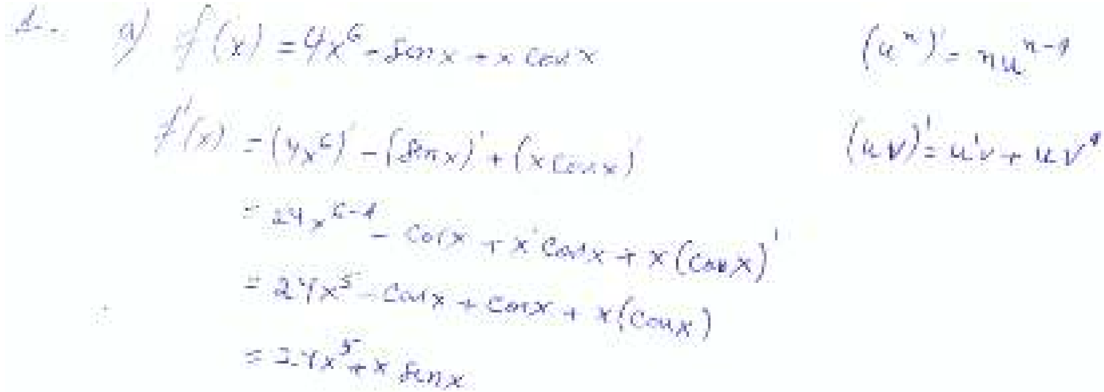
Figura 0.105 Resposta à questão 3b) da 1.ª prova parcelar (Amaro)

Figura 0.106 Resposta à questão 3c) da 1.ª prova parcelar (Amaro)

Nas resoluções das questões 3a) e 3b) (Figura 0.104 e Figura 0.105), o aluno apresenta um bom e minucioso desempenho. Chega às indeterminações e ao resultado final apresentando minuciosamente os passos necessários. O aluno apresenta bom desempenho algébrico.

Na resolução da questão 3c) (Figura 0.106) o aluno apresenta dificuldade na aplicação do conceito de limite fundamental trigonométrico. Ao substituir $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ por 1, o aluno mostra ter conhecimento sobre limite fundamental trigonométrico, mas ao fazer a substituição sem antes transformar o denominador em $3x$ para que seja igual ao argumento da função seno revela dificuldade no conceito. Nas resoluções dos limites das alíneas a) e b) o aluno mostra capacidade de transformar frações por conveniência de cálculo, mantendo-as equivalentes — ou seja, mostra capacidade de aplicar artifícios matemáticos. Ora, se tem essa capacidade, então também tem capacidade de transformar $\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ em $\frac{3}{3} \times \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3 \times \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}$, um artifício algébrico simples. Isso sustenta a ideia de que a dificuldade está no conceito de limite fundamental algébrico. O aluno apresenta uma boa conceiçaão operacional, mas teve dificuldades em relacionar conceitos na questão 3c), portanto revela um nível de compreensão do conceito de limite de função instrumental. Em relação às teorias APOS e da Reificação, o aluno revela ter uma estrutura mental a nível de processo e ter uma compreensão concetual na fase de condensação, respetivamente.

Resposta à questão 1 da 2.ª prova parcelar (Figura 0.107 e Figura 0.108).


1. a) $f(x) = 4x^6 - \operatorname{sen} x + x \cos x$

$(u^n)' = n u^{n-1}$

$f'(x) = (4x^6)' - (\operatorname{sen} x)' + (x \cos x)'$

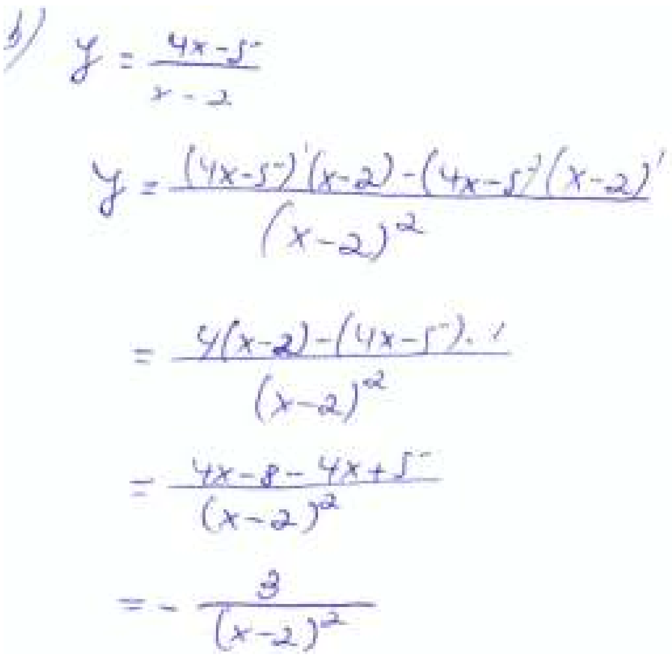
$(uv)' = u'v + uv'$

$= 24x^{6-1} - \cos x + x' \cos x + x(\cos x)'$

$= 24x^5 - \cos x + \cos x + x(\cos x)$

$= 24x^5 + x \operatorname{sen} x$

Figura 0.107 Resposta à questão 1a) da 2ª prova parcelar (Amaro)


b) $y = \frac{4x-5}{x-2}$

$y' = \frac{(4x-5)'(x-2) - (4x-5)(x-2)'}{(x-2)^2}$

$= \frac{4(x-2) - (4x-5).1}{(x-2)^2}$

$= \frac{4x-8-4x+5}{(x-2)^2}$

$= -\frac{3}{(x-2)^2}$

Figura 0.108 Resposta à questão 1b) da 2.ª prova parcelar (Amaro)

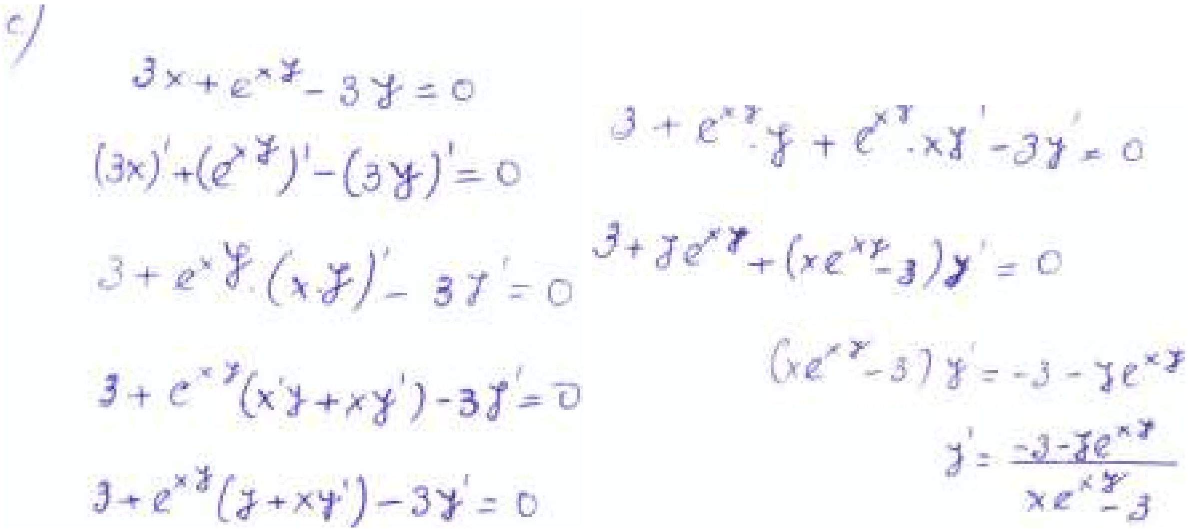
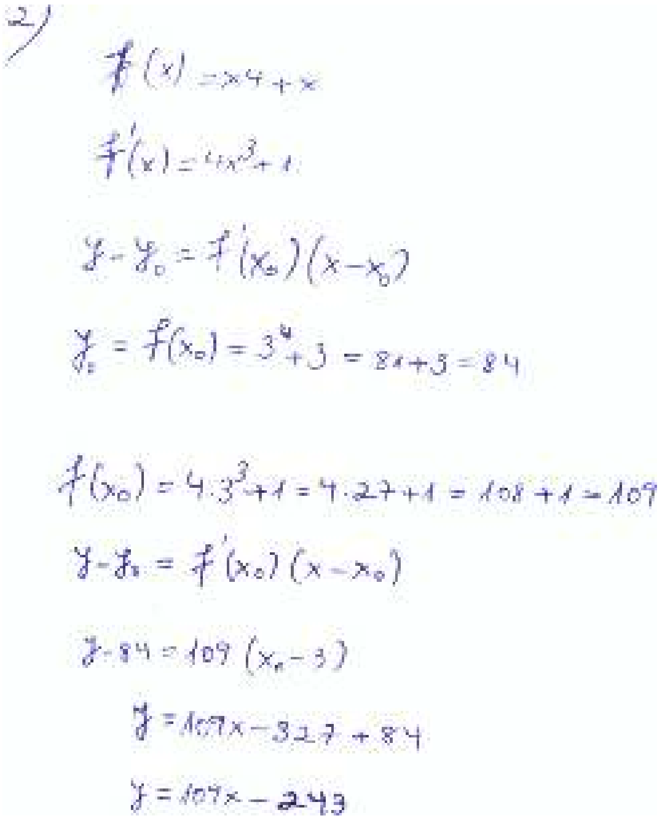


Figura 0.109 Resposta à questão 1c) da 2.ª prova parcelar (Amaro)

Em relação à segunda prova parcelar, na resposta à questão 1a) (Figura 0.107), o aluno comete um erro no quarto passo, em vez de obter $-\mathrm{sen}x$ obtém $\mathrm{sen}x$ ao derivar $\cos x$. Tirando este detalhe que, diante do desempenho do aluno, podemos considerar um lapso, este apresenta um bom desempenho algébrico. Relaciona bem regras da soma, do produto e da cadeia com fórmulas de derivada das funções seno, cosseno e da potência.

Na resolução da questão 1b) (Figura 0.108), o aluno relaciona bem a regra do quociente, a regra da soma e fórmula da potência. Na resolução da questão 1c) (Figura 0.109) o aluno, através de um bom desempenho algébrico, relaciona corretamente os conceitos de função implícita com os de regras e fórmulas de derivada. A compreensão de x e y como variáveis relacionadas, conforme o modelo 3UV de Trigueros & Usini (2003), evolui de tal forma que o aluno não apresenta dificuldades em relacionar as duas variáveis dentro de uma função dada na forma implícita, o aluno não tem dificuldade em absorver novas ideias complexas num tempo limitado. Em relação às teorias APOS e da Reificação, o aluno revela ter uma estrutura mental a nível de objeto e ter uma compreensão concetual na fase da reificação, respetivamente. O aluno revela um nível de compreensão do conceito de derivada de uma função relacional.

Resposta à questão 2 da 2.ª prova parcelar (Figura 0.110).

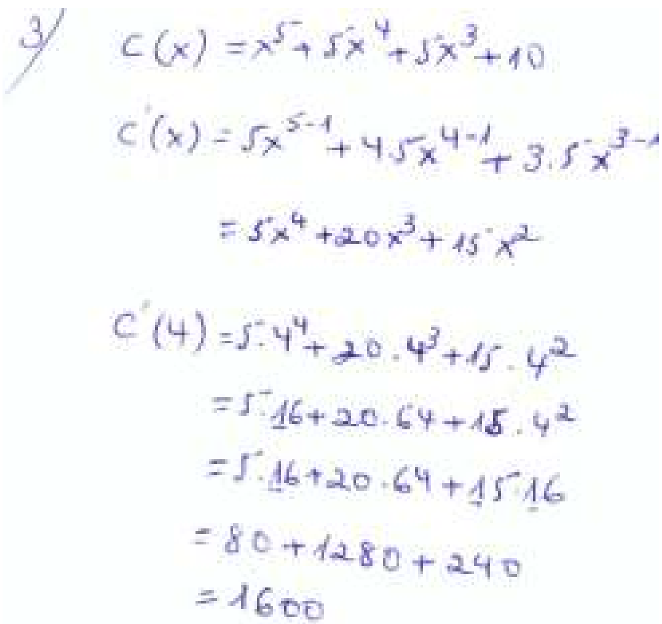

2)

$$f(x) = x^4 + x$$
$$f'(x) = 4x^3 + 1$$
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y_0 = f(x_0) = 3^4 + 3 = 81 + 3 = 84$$
$$f'(x_0) = 4 \cdot 3^3 + 1 = 4 \cdot 27 + 1 = 108 + 1 = 109$$
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y - 84 = 109\,(x_0 - 3)$$
$$y = 109x - 327 + 84$$
$$y = 109x - 243$$

Figura 0.110 Resposta à questão 2 da 2.ª prova parcelar (Amaro)

Na resolução da questão 2 (Figura 0.110), em determinada altura o aluno faz confusão entre a variável x e o pré-ponto x_0. constatamos alguma falta de rigor no tratamento de símbolos que o leva a tal falha, dando tratamento indiferenciado. Apesar disso, o aluno chega ao resultado pretendido.

Resposta à questão 3 da 2.ª prova parcelar (Figura 0.111).


3)

$$C(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 10$$
$$C'(x) = 5x^{5-1} + 4.5x^{4-1} + 3.5x^{3-1}$$
$$= 5x^4 + 20x^3 + 15x^2$$
$$C'(4) = 5 \cdot 4^4 + 20 \cdot 4^3 + 15 \cdot 4^2$$
$$= 5 \cdot 16 + 20 \cdot 64 + 15 \cdot 4^2$$
$$= 5 \cdot 16 + 20 \cdot 64 + 15 \cdot 16$$
$$= 80 + 1280 + 240$$
$$= 1600$$

Figura 0.111 Resposta à questão 3 da 2.ª prova parcelar (Amaro)

Em relação à questão 3, o aluno apresenta um bom desempenho (Figura 0.111). O aluno consolida a sua conceção operacional, relacionando bem a regra da soma e a fórmula da potência.

Trata-se de um aluno que muito dificilmente falta às aulas e que chega à sala antes da professora, portanto, podemos considerá-lo assíduo e pontual. Toma nota de tudo quanto a professora escreve no quadro ou dita. Em relação às transcrições dos conteúdos do quadro, importa assinalar um pormenor interessante, com frequência o aluno não se limita a transcrever os passos dados pela professora, entre eles inclui alguns que lhe servem de apoio para uma melhor compreensão. Expontaneamente participa nas aulas, resolvendo questões ao quadro, respondendo a questões apresentadas pela professora e apresentando dúvidas.

Quanto à participação na investigação, acedeu ao convite para fazer parte dela e colaborou para que a mesma corresse da melhor maneira possível. Sempre procurou ser claro e objetivo nas suas respostas, o que permitiu ao investigador ter uma visão com uma boa aproximação das suas estruturas mentais, bem como dos mecanismos utilizados para a sua superação. Nas suas descrições sempre se fizeram presentes palavras "próprias", mas, com a boa interação feita com o investigador, sempre foi compreensível e ajustável à linguagem tecnicamente correta.

Ao longo das aulas, nas diferentes abordagens feitas pela professora, o desenvolvimento das estruturas mentais era bom, o que, atendendo que a professora fazia outras avaliações para além das parcelares, pesou positivamente na sua média final de 17 valores.

Tabela 19: Síntese da caraterização do Amaro no fim do semestre

Aluno	Função			Derivação			Integração		
	Ação	Processo	Objeto	Ação	Processo	Objeto	Ação	Processo	Objeto
Amaro			X			X		X	

Depois de lhe ser lecionada a unidade curricular Matemática I, o Amaro essencialmente eleva o nível de estrutura mental com que iniciou a unidade curricular nos conceitos estudados. Importa referir que os conhecimentos nos quais eleva a sua estrutura mental são mais abrangentes e mais profundos, portanto, mais complexos.

O Amaro apresenta muito bom desempenho, em particular o algébrico, em todas as questões de derivada da 2.ª prova parcelar, o melhor dos três alunos estudados. Importa destacar o seu desempenho (Figura 0.109) na questão 1c) da 2.ª prova parcelar, onde é o único que apresenta o resultado pretendido, estabelecendo relações novas entre conceitos para poder derivar funções implícitas. O aluno apresenta compreensão relacional dos conceitos, portanto, tem um conceito imagem relacional de derivada de função. Para além do seu empenho durante as aulas, provavelmente deve-se à sua boa prestação algébrica na segunda parte (diferenciação) do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3), ou seja, ao nível de preparação algébrica com que o mesmo se apresenta para a frequência da unidade curricular Matemática I. Na aplicação deste instrumento podemos identificar elementos relevantes para a aprendizagem do aluno, como as ações mentais 1 e 2 de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008) no seu desempenho algébrico. Quanto às outras ações mentais (3, 4 e 5), embora sem evidência no seu desempenho algébrico, não encontramos evidências algébricas de que não as tenha desenvolvidas. As resoluções das questões 2 e 3 da 2.ª prova parcelar (Figura 0.110Figura 0.111) requerem — em termos de interpretação e não necessariamente em termos procedimentais — as ações mentais 3 (coordenar a quantidade de mudança de uma variável com alterações na outra variável) e 5 (coordenar a taxa de variação instantânea da função com variações contínuas na variável independente para todo o domínio da função). Por esta razão e atendendo ao desempenho que o aluno apresenta, há indícios de que o mesmo tenha desenvolvidas as ações mentais 3 e 5.

Um outro elemento relevante no desempenho do aluno é o que apresenta na resolução (Figura 0.18) da questão 5 do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3). Nesta resolução o aluno apresenta um bom desempenho ao relacionar adequadamente funções representadas algébrica e graficamente. Este desempenho reflete-se positivamente na resolução (Figura 0.103) que o aluno apresenta da questão 2 da 1.ª prova parcelar, onde, em particular na alínea b), mostra bom raciocínio na interpretação (classificação) que faz da descontinuidade, utilizando uma linguagem diferente do padrão, no entanto, lógica e válida. Deste modo, atendendo à distinção entre visão de ação e de processo das funções segundo Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008, p. 36) (Tabela 8), constatamos a visão de processo que o aluno tem de funções, pois, por exemplo, para operar a função não precisa de tê-la vinculada a uma regra nem depende da sua fórmula para produzir respostas. Atendendo ao seu desepenho nas outras questões tanto da primeira como da segunda prova parcelar, podemos concluir que, no que diz respeito a funções, a sua estrutura mental está ao nível de objeto e a sua conceção é relacional. Consideramos este um quadro de aprendizagem não só quantitativa, mas também qualitativa, pois o aluno começa a frequentar a unidade curricular Matemática I com a estrutura mental essencialmente assente em processos (com conceção instrumental na definição de função e conceção relacional nas resoluções das questões da parte de funções do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos — Apêndice 3) e nesta altura apresenta a estrutura mental essencialmente no domínio do objeto.

3.2.3 Ana

Resposta à questão 1 da 1.ª prova parcelar (Figura 0.112).

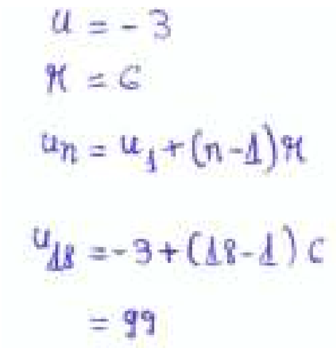


Figura 0.112 Resposta à questão 1 da 1.ª prova parcelar (Ana)

Na resolução (Figura 0.112) a aluna começa por apresentar os dados que lhe são fornecidos, $u = -3$ (em vez de $u_1 = -3$) e $r = 6$, omitindo $n = 18$. A substituição dos dados fornecidos na fórmula $u_n = u_1 + (n-1)r$, apesar das insuficiências na apresentação dos dados fornecidos, é bem feita, mostrando-nos que a insuficiência está na representação algébrica e não na interiorização que a aluna faz do problema. A aluna chega ao resultado pretendido na questão.

Resposta à questão 2 da 1.ª prova parcelar (Figura 0.113).

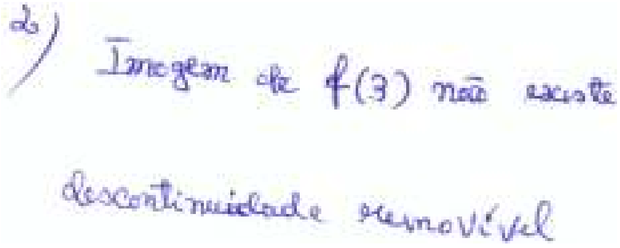


Figura 0.113 Resposta à questão 2 da 1.ª prova parcelar (Ana)

Na resolução (Figura 0.113) a aluna não explora completamente o conceito de continuidade de uma função num ponto, baseia-se apenas na análise à imagem da função no objeto $x = 3$ para concluir sobre a sua continuidade. Apesar de nas resoluções algébricas, geralmente, começar-se por apresentar a imagem da função, a análise da sua continuidade começa no limite, na comparação dos limites laterais. Só depois disso, não se encontrando descontinuidade na análise ao limite, é que se parte para a análise à imagem e, havendo imagem, para a comparação entre a imagem e o limite da função. Dito de outra forma, a sequência de análise da continuidade de uma função é: (1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$; (2) $\exists f(x_0)$; (3) $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. A aluna começa e conclui a análise na segunda etapa, ou seja, não calcula os limites laterais da função na abscissa do ponto em análise, daí não ter chegado ao resultado pretendido. A aluna revela um nível de compreensão instrumental com dificuldades na aplicação do procedimento de análise da continuidade da função. Em relação às teorias APOS e da Reificação, revela uma estrutura mental a nível de processo e revela ter uma compreensão concetual na fase de condensação, respetivamente.

Resposta à questão 3 da 1.ª prova parcelar (Figura 0.114).

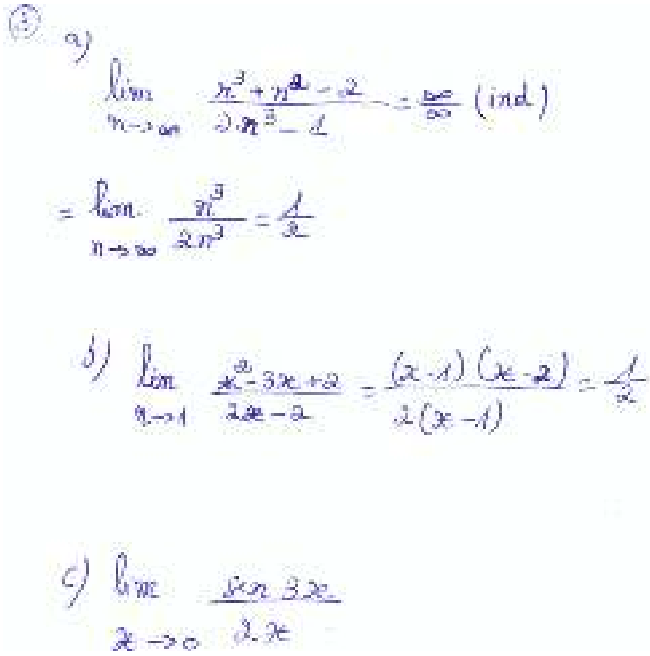


Figura 0.114 Resposta à questão 3 da 1.ª prova parcelar (Ana)

Na questão 3b) (Figura 0.114) o resultado final é correto, mas ao longo da resolução surge uma dificuldade relacionada com a aplicação do conceito de limite de uma função, é colocada a expressão $\frac{(x-1)(x-2)}{2(x-1)}$, mas atrás dela a aluna não coloca a expressão $\lim_{x \to 1}$. O limite de uma função é calculado em relação à variável indicada nesta expressão. A aluna considera esta uma forma de simplificar a resolução, a insuficiência está na respresentação algébrica e não no raciocíno que a aluna aplica na resolução da questão. Em relação à questão 3c) (Figura 0.114), nem sequer arrisca. A julgar pelo desempenho algébrico noutras questões, podemos inferir que a dificuldade está em lembrar-se da fórmula do limite fundamental trigonométrico e não em fazer transformações para poder aplicá-la. Podemos considerar o nível e compreensão da aluna como sendo instrumental. Em relação às teorias APOS e da Reificação, podemos considerar como estando a nível de processo e na fase de condensação, respetivamente.

Resposta à questão 1a) da 2.ª prova parcelar (Figura 0.115).

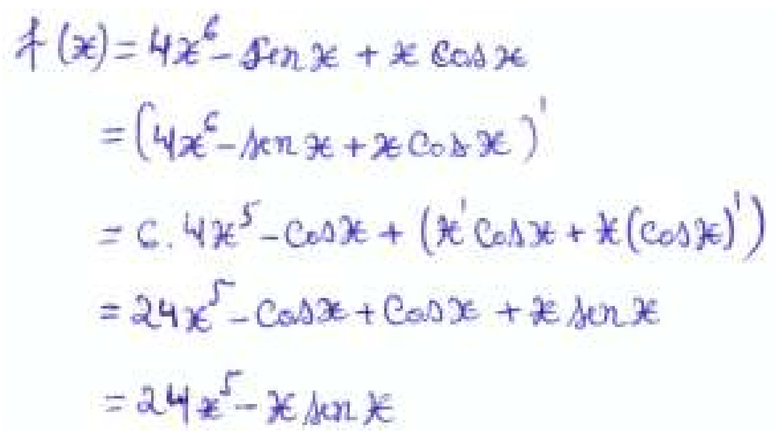


Figura 0.115 Resposta à questão 1a) da 2.ª prova parcelar (Ana)

Em relação à segunda prova parcelar, na questão 1a) (Figura 0.115), a aluna comete um pequeno lapso no penúltimo passo ao trocar o sinal na derivada de $\cos x$. Pelo desempenho algébrico que tem apresentado, podemos considerar um lapso resultante de, por exemplo, transcrição da resolução de uma folha para outra. A aluna relaciona adequadamente a regra da derivada da soma, a regra da cadeia e a regra do produto com a fórmula da derivada da potência e da derivada de funções trigonométricas.

Resposta à questão 1b) da 2.ª prova parcelar (Figura 0.116).

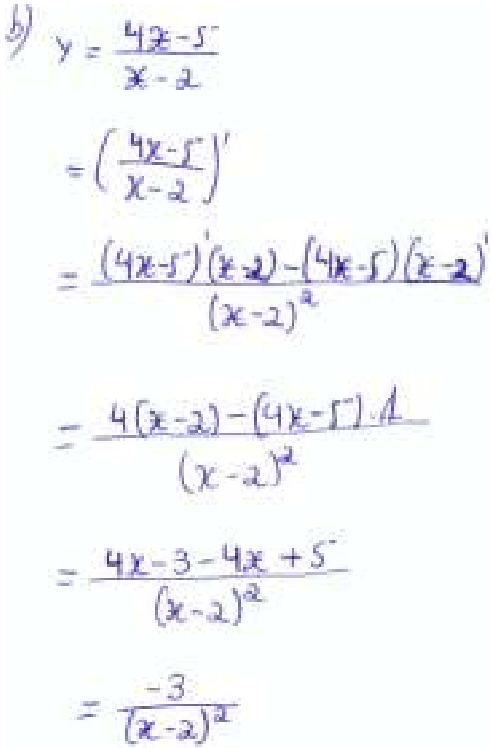
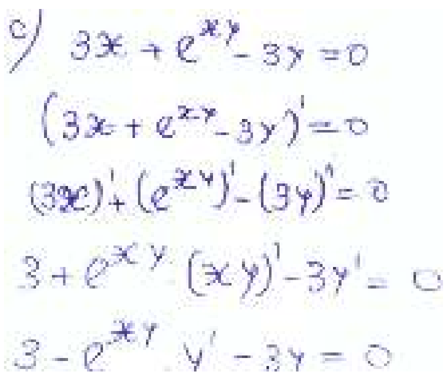


Figura 0.116 Resposta à questão 1b) da 2.ª prova parcelar (Ana)

Na resolução (Figura 0.116) a aluna apresenta um bom desempenho algébrico, relacionando bem as regras do quociente e da soma, apesar de um pequeno lapso ao passar do terceiro para o quarto, passando a expressão $4(x-2)$ para $4x-3$. Consideramos lapso pelo desempenho algébrico apresentado pela aluna e, em particular, por ter, mesmo assim, chegado ao resultado pretendido na questão.

Resposta à questão 1c) da 2.ª prova parcelar (Figura 0.117).



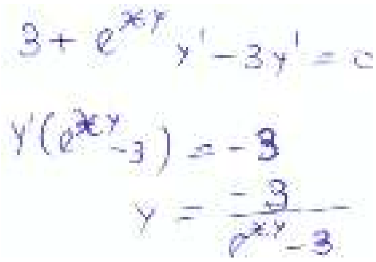


Figura 0.117 Resposta à questão 1c) da 2.ª prova parcelar (Ana)

Nesta questão (Figura 0.117) a aluna começa por aplicar bem a regra da derivada quando apenas está envolvida a operação soma algébrica, no primeiro e no segundo passos. No terceiro passo, na parcela $(e^{xy})'$, que nos dois passos seguintes é transformada em $e^{xy}(xy)'$ e em $-e^{xy} \cdot y'$, a aluna apresenta dificuldade em relacionar a regra da cadeia e a regra do produto. Notamos que onde se encontra a variável y, e^{xy} e $3y$, a aluna apresenta dificuldades em derivar a variável dependente apresentada na forma implícita. A interpretação da classificação de x e y como variáveis relacionadas, conforme o modelo 3UV de Trigueros & Usini (2003), precisa de ser melhorada no contexto das funções implícitas. A aluna tem dificuldade em absorver nova ideia complexa num tempo limitado, conforme descreve Tall (1992). Quanto às teorias APOS e da Reificação, a aluna revela ter uma estrutura mental a nível de processo e ter uma compreensão concetual na fase de condensação. A aluna tem um nível de compreensão do conceito de derivada de uma função dada na forma implícita instrumental.

Resposta à questão 2 da 2.ª prova parcelar (Figura 0.118).

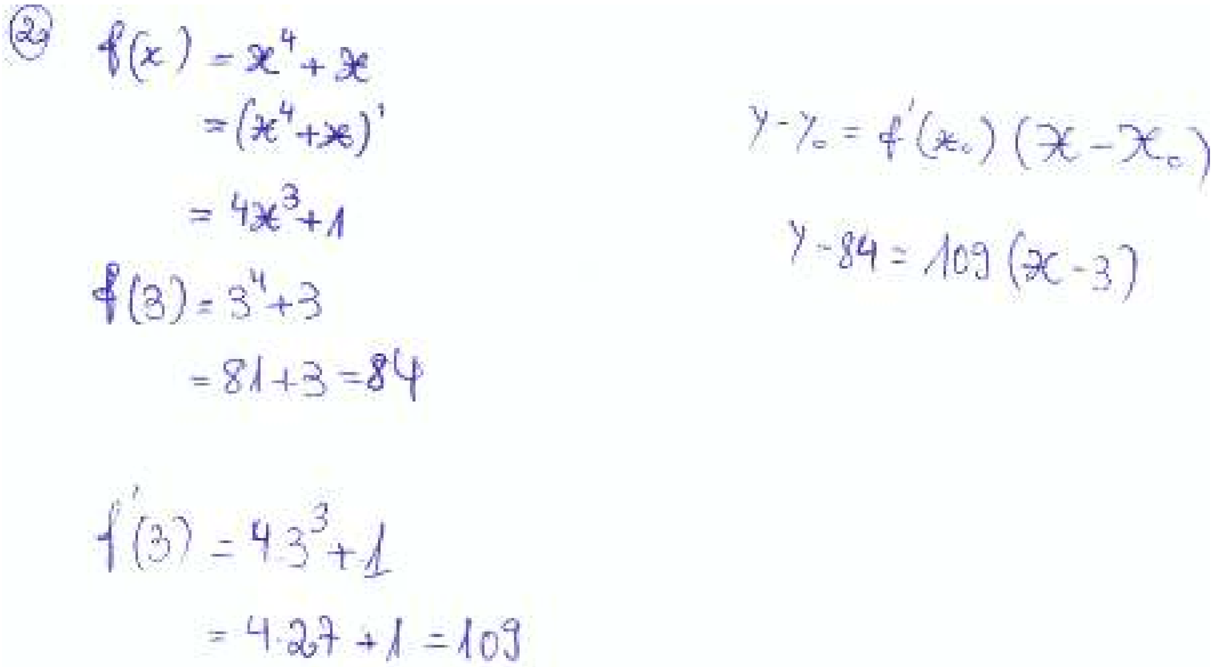


Figura 0.118 Resposta à questão 2 da 2.ª prova parcelar (Ana)

Na resolução da questão (Figura 0.118) a aluna apresenta um bom desempenho algébrico, tendo chegado ao resultado pretendido. Apesar disso, importa assinar que em $f(x) = x^4 + x = (x^4 + x)' = 4x^3 + 1$ a aluna apresenta uma insuficiência na representação algébrica do seu pensamento, pois o correto seria $f(x) = x^4 + x \Rightarrow f'(x) = (x^4 + x)' \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 1$. Consideramos apenas uma insuficiência na representação algébrica, pois nos passos seguintes, em particular na substituição na fórmula $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, a aluna distingue corretamente $f(x)$ de $f'(x)$.

Resposta à questão 3 da 2.ª prova parcelar (Figura 0.119).

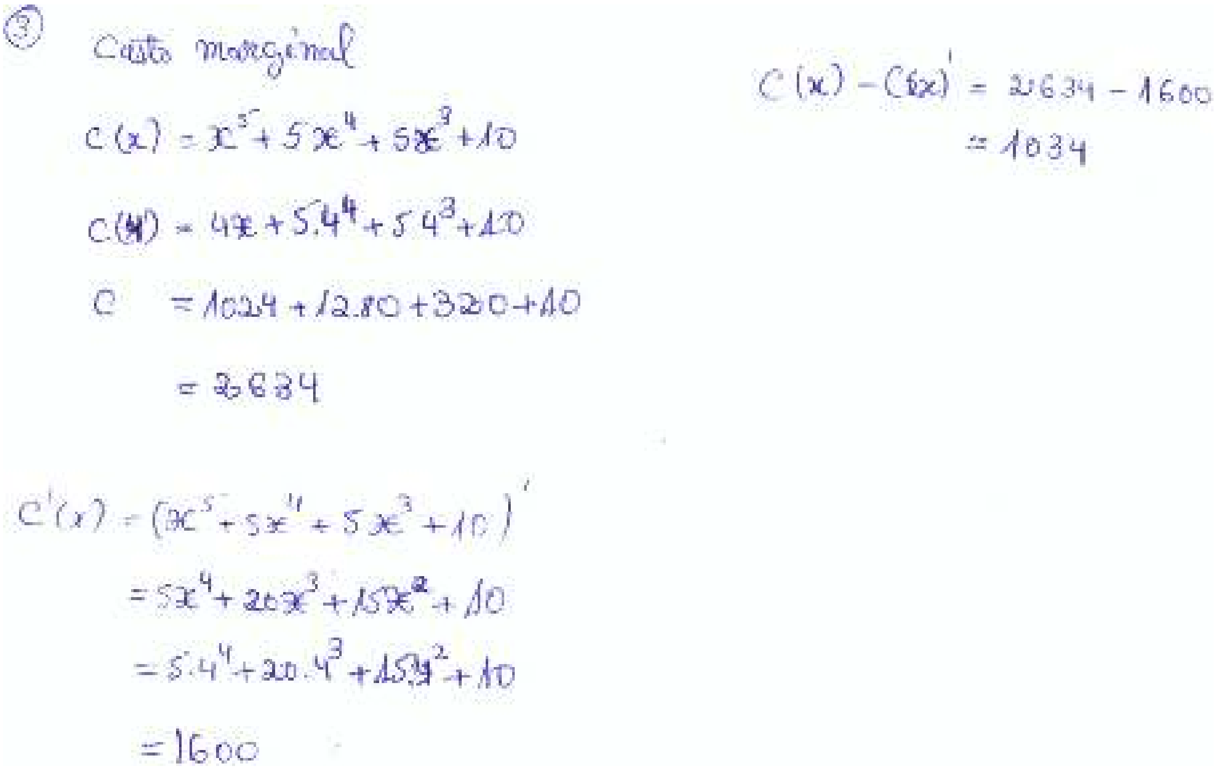


Figura 0.119 Resposta à questão 3 da 2.ª prova parcelar (Ana)

Na questão 3 da 2.ª prova parcelar (Figura 0.119) a aluna chega a um resultado final que não é o pretendido, $C(x) - C(x)' = 2634 - 1600 = 1034$, mas, ao longo da resolução passa pelo resultado pretendido, $C'(x) = (x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 10)'$. Embora importe assinalar o lapso que a aluna apresenta ao escrever $C(x)'$ em vez de $C(x)$, algebricamente a aluna apresenta um bom desempenho, não tendo dificuldades em derivar polinómios. A igualdade $C(4) = 4x + 5 \cdot 4^4 + 5\ 4^3 + 10$ no lugar de $C(x) = 4^5 + 5 \cdot 4^4 + 5 \cdot 4^3 + 10$ permite identificar o que Tall (1992) chama de dificuldade em selecionar e usar representações apropriadas. A aluna tem um nível de compreensão instrumental.

Trata-se de uma aluna com poucas ausências e com poucos atrasos, ainda assim podemos considerá-la assídua e pontual. Durante as aulas manifesta uma postura mais reativa do que proativa, pouco interventiva, no entanto, bastante observadora. Apesar disso, geralmente, quando questionada sobre determinado assunto tratado na aula, apresenta respostas satisfatórias. Quando questionada sobre determinado assunto anterior à aula, responde com dificuldade. A sua capacidade de responder satisfatoriamente aos assuntos em estudo no momento era maior do que a de responder aos assuntos abordados em aulas anteriores.

No que diz respeito à participação na investigação, sempre se manifestou disponível e colaborativa. Interagia com o investigador com naturalidade e fazia frequentes comentários que denotavam superação ao longo desta interação. Procurava utilizar expressões tecnicamente corretas no seu discurso, mas com algumas dificuldades, o que tornava o seu discurso às vezes reticente, ao que se seguia a utilização de palavras “próprias” da sua compreensão.

Ao longo das aulas observadas, com algumas dificuldades, a aluna apresentou progressos. As provas parcelares e as outras avaliações feitas pela professora permitiram-lhe alcançar a média final de 15 valores.

Tabela 20 Síntese da caraterização do Ana no fim do semestre

Aluno	Função			Derivação			Integração		
	Ação	Processo	Objeto	Ação	Processo	Objeto	Ação	Processo	Objeto
Ana		X			X		X		

A aprendizagem da Ana é marcada pela consolidação do nível de conhecimento de função e de integral de função, processo e ação respetivamente, e pela evolução do nível de conhecimento de derivada de função de ação para processo. Do ponto de vista algébrico é de salientar alguma incoerência entre o pensamento da aluna e a sua representação simbólica como notamos nas resoluções das questões 1 e 3b) da 1.ª prova parcelar e na questão 2 da 2.ª prova parcelar, ou seja, pensamento correto, mas representação simbólica desajustada. O conceito imagem que tem de função é essencialmente instrumental.

Na derivada de função, a evolução do nível de ação para o de processo é notória, por exemplo, ao compararmos a resolução da questão 8 do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3) com as resoluções das questões 1a) e 1b) da 2.ª prova parcelar, notamos aprendizagem, pois a aluna reconhece e aplica melhor as regras da cadeia e do quociente, bem como as relaciona melhor com as fórmulas de derivada aplicadas aos diferentes tipos de funções. Nas alíneas 1a) e 1b) mostra um conceito imagem relacional, mas na 1c) mostra um conceito imagem incipiente.

As ações mentais 1 (coordenação da dependência de uma variável noutra) e 2 (coordenação da direção da mudança de uma variável com mudanças na outra) na resolução que a aluna apresenta da questão 7 do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3), bem como as ações mentais 3 (coordenar a quantidade de mudança de uma variável com alterações na outra variável) e 5 (coordenar a taxa de variação instantânea da função com variações contínuas na variável independente para todo o domínio da função) — de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008) — são parte das interpretações necessárias para a resolução das questões 2 e 3 da 2.ª prova parcelar. Assim, tendo em conta as resoluções destas duas questões (Figura 0.118Figura 0.119), consideramos provável o desenvolvimento destas ações mentais, 3 e 5, no raciocínio covariacional da aluna, consolidando o alcance da estrutura mental processo na derivada de função.

Na resolução da questão 2 da 1.ª prova parcelar (Figura 0.113) a aluna é sintética, mostrando limitações no tratamento de uma função não vinculada a uma regra e não dependente de uma expressão analítica. Deste modo, atendendo à visão de ação e de processo das funções Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008, p. 36) (Tabela 8), constatamos uma razoável visão de processo. Quanto à teoria da Reificação constatamos que a sua compreensão concetual está na fase de condensação.

Considerando o bom desempenho algébrico da aluna, consideramos a sua estrutura mental respeitante a funções e derivada de funções a nível de processo e o nível de conceito imagem instrumental.

CAPÍTULO 4 Conclusões e recomendações

4.1 Conclusões

Importa recordar que o estudo é guiado por duas questões de investigação: Qual o papel dos conhecimentos prévios na aprendizagem de conceitos do Cálculo? Que características têm as aprendizagens realizadas pelos alunos ao longo do estudo de tópicos de Cálculo específicos?

Conclusões relativas à primeira questão de investigação: Qual o papel dos conhecimentos prévios na aprendizagem de conceitos do Cálculo?

De uma maneira geral, notou-se que os alunos tinham maior compreensão sobre os conceitos do ponto de vista algébrico. Deste ponto de vista, mais facilmente reconheciam os objetos, mais facilmente os manipulavam, mais facilmente os interiorizavam e os assimilavam como processos, mais facilmente construíam e reconstruíam novos objetos matemáticos. Foi importante analisar as respostas dadas às questões relacionadas ao conceito de função, porquanto permitiram-nos ir assinalando os desempenhos e as insuficiências que os alunos tinham, o que nos permitiu melhor entender as suas estruturas cognitivas.

Em relação a funções, os alunos Amarildo, Amaro, Ana e Eduardo revelaram estruturas mentais predominantemente a nível de processo, revelando compreensão do conceito de função predominantemente instrumental ou relacional, segundo a categorização de Domingos (2003). Os demais alunos revelaram estruturas mentais predominantemente a nível de ação, revelando uma compreensão do conceito de função predominantemente incipiente ou instrumental.

Tanto a Teoria da Reificação como a APOS reconhecem a passagem cíclica pelas suas fases como forma da aprendizagem do aluno ascender na hierarquia da complexidade dos conceitos matemáticos. A quebra de ciclos ou a precariedade da passagem por eles repercute-se nas aprendizagens subsequentes. No caso das funções reais de variável real, conceitos como os de variável, de números reais e suas propriedades, bem como de funções elementares, na estrutura cognitiva de alguns alunos — alunos a nível de ação na Tabela 14 — não atingiram as fases de topo dos ciclos de aprendizagem das teorias APOS — objeto e esquema — e da Reificação — reificação. Esta situação pressupõe rutura de ciclo normal de aprendizagem, o que poderá ser recuperável com trabalho extra de superação. Desta maneira, compreende-se as dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução das questões que se prendem com o estudo de funções.

Em relação ao Cálculo Diferencial, o Amaro mostra compreensão predominantemente relacional dos conceitos, revelando uma estrutura mental do ponto de vista algébrico ao nível do objeto, do ponto de vista numérico ao nível da ação e do ponto de vista gráfico ao nível do processo. O Amarildo mostra uma compreensão predominantemente instrumental dos conceitos, com uma estrutura mental do ponto de vista algébrico e numérico como processo e do ponto de vista gráfico como ação. A Ana mostra uma compreensão predominantemente instrumental ou incipiente. Do ponto de vista algébrico revela a estrutura mental ao nível do processo, do ponto de vista numérico e gráfico ao nível da ação.

Sobre o Cálculo Diferencial importa também referir que a Tabela 17 sintetiza o nível de desempenho dos alunos nas questões sobre diferenciação, onde se nota uma maior frequência de alunos a nível de ação com um conceito imagem incipiente. Isto parece ser consequência das aprendizagens dos conceitos anteriores, ou seja, para a aprendizagem da diferenciação precisa-se de uma boa compreensão do conceito de função. Havendo dificuldades no ciclo de aprendizagem de função, elas repercutem-se no ciclo de aprendizagem de diferenciação. Um indicador desta constatação é o da relação entre composição de funções e a aplicação da regra da cadeia, mais precisamente a relação entre as questões 4 e 8 do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3), respetivamente. Todos os alunos — Alexandra, Efigénio, Elias e Emanuela — que não resolveram corretamente a questão 4 também não resolveram corretamente a questão 8. Nos dados estudados a não resolução da questão 4 implicou a não resolução da questão 8. Ambas as questões são de resolução algébrica. Nota-se uma tendência de os alunos com dificuldades nas questões sobre funções aumentarem as suas dificuldades nas questões sobre derivação. A condição é necessária e não suficiente, o desempenho da Ana na questão 8 não é bom, resolve incorretamente, apesar de ter resolvido corretamente a questão 4.

Por outro lado, notamos a tendência de alunos com melhor desempenho no conceito de função apresentarem melhor desempenho no conceito de derivação, particularmente no que à representação algébrica diz respeito. Repare-se nos desempenhos do Amarildo, do Amaro e da Ana, são os melhores desempenhos na aprendizagem do conceito de derivação. Como já se pôde constatar (Tabela 16) são os que têm melhor desempenho sobre o conceito de função. Para além destes três alunos, importa assinalar o caso do Eduardo que, no conceito de função, apresentou um desempenho a nível dos três melhores alunos. Apesar disso, o seu desempenho no conceito de derivação está a nível de ação. Sobre este aluno podemos inferir que a dificuldade está na aprendizagem do conceito de diferenciação e não tanto nas dificuldades do conceito de função.

Particularmente nas respostas à questão 10 do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3), notamos a hierarquia entre as ações mentais definida pelo nível de solidez dos conceitos. Quanto mais sólidos são os conceitos maior é o conjunto de ações mentais desenvolvidas pelos alunos. Geralmente as ações mentais surgem em sequência, podendo haver casos de rutura na sequência como, aliás, se verifica em relação à coordenação da taxa média de variação da função com incrementos uniformes de variação na variável de entrada — por exemplo, na análise feita aos desempenhos do Amarildo nas questões 7 (onde se verifica que o aluno manifesta coordenação da dependência de uma variável noutra, coordenação da direção da mudança de uma variável com a mudança da outra, coordenação da quantidade de mudança de uma variável com alterações na outra, e indícios de coordenação da taxa de variação instantânea da função com variações contínuas na variável independente, sem manifestar coordenação da taxa média de variação da função com incrementos uniformes de variação da variável de entrada) e 10 (onde se verifica que, embora com dificuldades, o aluno manifesta coordenação da dependência de uma variável noutra, coordenação da direção da mudança de uma variável com a mudança da outra, coordenação da quantidade de mudança de uma variável com alterações na outra, bem como coordenação da taxa de variação instantânea da função com variações contínuas na variável independente, mas não manifesta coordenação da taxa média de variação da função com incrementos uniformes de variação da variável de entrada), bem como na análise feita ao desempenho do Efigénio na questão 7 (onde se verifica que o aluno manifesta coordenação da dependência de uma variável noutra e indícios de coordenação da taxa de variação instantânea da função com variações contínuas na variável independente, sem manifestar coordenação da direção da mudança de uma variável com a mudança da outra, coordenação da quantidade de mudança de uma variável com alterações na outra, nem coordenação da taxa média de variação da função com incrementos uniformes de variação da variável de entrada).

Do ponto de vista processual, mas principalmente do ponto de vista concetual, é notório o reflexo do acúmulo de dificuldades nos alunos. Quantas mais dificuldades apresentadas nas secções Função e Diferenciação do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3), maiores as dificuldades apresentadas na secção Integração. Todos os alunos refletiram nos seus desempenhos as dificuldades apresentadas nas duas secções anteriores. Apesar disso, importa destacar o desempenho de três deles: Amarildo, Amaro e Ana. Estes, também pelo facto de menos dificuldades terem apresentado nas duas secções anteriores, apresentaram menos dificuldades na secção Integração.

Notamos que nos alunos com desempenho a nível de ação — tanto no conceito de função, no de derivação, como no de integração — onde predomina uma visão algorítmica, pervalece uma visão mostrativa em detrimento de uma visão demonstrativa da Matemática, predomina uma visão particular ou pontual em vez de uma visão genérica dos conceitos matemáticos, regista-se lacunas das formações nos níveis anteriores de ensino, regista-se uma visão descontextualizada do Cálculo. Todos os aspetos indicados associados às dificuldades intrínsecas aos objetos matemáticos contribuíram para o baixo desempenho dos alunos.

Em relação aos alunos com desempenho a nível de processo ou de objeto, nos três conceitos estudados, notamos algum desprendimento da visão algorítmica, da visão sequencial nas suas resoluções, bem como nas suas declarações em entrevistas e em intervenções feitas na sala de aula. A visão mostrativa ainda supera a demonstrativa. A disciplina Matemática I, não sendo de especialidade, está estruturada sem muitas demonstrações — é essencialmente Cálculo Informal, como designa Tall (1992) —, o que contribuiu para que a visão mostrativa prevalecesse sobre a demonstrativa. A capacidade de generalização nestes alunos era superior à daqueles a nível de ação, porquanto conseguiam reconhecer a necessidade de aplicação de determinado conceito em várias circunstâncias. O nível de desempenho dos alunos permitiu reduzir a influência das dificuldades intrínsecas aos objetos matemáticos.

É importante destacar o caso da Emanuela que não responde a nenhuma das questões do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3). Na entrevista que sucedeu ao questionário pouco ou nada de substancial apresentou. Registamos a sua desistência cerca de dois meses depois do arranque das aulas, após aplicação da 1.ª prova parcelar, onde teve um mau desempenho. O seu nível de preparação relativamente aos conceitos mais elementares era incipiente.

Sobre as visões que os alunos vão manifestando dos diferentes objetos matemáticos, importa aqui fazer referência àquela que se debruça sobre o papel das variáveis. Das três classificações de variável conforme o Modelo 3UV — incógnita, número genérico e variáveis relacionadas — de Trigueros & Usini (2003), foi notória, com frequência considerável, particularmente no conceito de função (por exemplo: (1) a entrevista da Alexandra sobre funções em 0; (2) Figura 0.11; (3) Figura 0.33), a confusão de alguns alunos entre incógnita e variáveis relacionadas. A capacidade de discernimento entre as três classificações constitui um elemento importante na construção do conhecimento do aluno.

A análise aos dados mostra-nos a influência dos conhecimentos prévios dos alunos na sua aprendizagem do Cálculo. Registamos que processos interiorizados dão lugar a novos processos mais profundos e mais abrangentes. Registamos que processos não interiorizados dificultam a evolução da compreensão dos alunos. Registamos ainda que a associação entre processos anteriores e a compreensão dos alunos nem sempre é de sucesso-sucesso ou de insucesso-insucesso.

No caso do Amarildo, registamos o reflexo do seu bom desempenho nas questões de resolução algébrica do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3) no seu bom desempenho nas questões 1a) (Figura 0.97) e 1b) (Figura 0.98) da 2.ª prova parcelar, questões em que se requer a aplicação da regra da cadeia. Nestas alíneas a) e b), o aluno apresenta compreensão relacional, mas na alínea c) (Figura 0.99) apresenta compreensão incipiente devido à necessidade de relacionar conceitos de derivada de uma função com o conceito de função implícita.

Um elemento relevante no desempenho do Amaro é o que apresenta na resolução (Figura 0.18) da questão 5 do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3). Nesta resolução o aluno apresenta um bom desempenho ao relacionar adequadamente funções representadas algébrica e graficamente. Este desempenho reflete-se positivamente na resolução (Figura 0.103) que o aluno apresenta da questão 2 da 1.ª prova parcelar, onde, em particular na alínea b), mostra bom raciocínio na interpretação (classificação) que faz da descontinuidade, utilizando uma linguagem diferente do padrão, no entanto, lógica e válida. Deste modo, atendendo à distinção entre visão de ação e de processo das funções (Oehrtman, Carlson, & Thompson, 2008, p. 36) (Tabela 8), constatamos a visão de processo que o aluno tem de funções, pois, por exemplo, para operar a função não precisa de tê-la vinculada a uma regra nem depende da sua fórmula para produzir respostas. Atendendo ao seu desepenho nas outras questões tanto da primeira como da segunda prova parcelar, podemos concluir que, no que diz respeito a funções, a sua estrutura mental está ao nível de objeto e a sua conceção é relacional. Consideramos este um quadro de aprendizagem não só quantitativa, mas também qualitativa, pois o aluno começa a frequentar a unidade curricular Matemática I com a estrutura mental ao nível do processo (com conceção instrumental na definição de função e conceção relacional nas resoluções das questões da parte de funções do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos — Apêndice 3) e nesta altura apresenta uma estrutura mental ao nível do objeto.

O Amaro apresenta muito bom desempenho, em particular no domínio algébrico, em todas as questões de derivação da 2.ª prova parcelar, o melhor dos três alunos estudados. Importa destacar o seu desempenho (Figura 0.109) na questão 1c) da 2.ª prova parcelar, onde é o único que apresenta o resultado pretendido, estabelecendo relações novas entre conceitos para poder derivar funções implícitas. O aluno apresenta compreensão relacional dos conceitos. Para além do seu empenho durante as aulas, provavelmente deve-se à sua boa prestação algébrica na segunda parte (diferenciação) do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos

(Apêndice 3), ou seja, ao nível de preparação algébrica com que o mesmo se apresenta para a frequência da unidade curricular Matemática I.

Na resolução da questão 2 da 1.ª prova parcelar (Figura 0.113) a Ana é sintética, mostrando limitações no tratamento de uma função não vinculada a uma regra e não dependente de uma fórmula. Deste modo, atendendo à visão de ação e de processo das funções (Oehrtman, Carlson, & Thompson, 2008, p. 36) (Tabela 8), constatamos uma razoável visão de processo. Tendo em conta o bom desempenho algébrico da aluna, consideramos a sua estrutura mental respeitante a funções a nível de processo, com um nível de conceito imagem de função predominantemente instrumental.

Em relação à Ana, na derivação, a evolução da estrutura mental ação para processo é notória, por exemplo, ao compararmos a resolução da questão 8 (Figura 0.60) do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3) com as resoluções das questões 1a) (Figura 0.115) e 1b) (Figura 0.116) da 2.ª prova parcelar, notamos aprendizagem, pois a aluna reconhece e aplica melhor as regras da cadeia e do quociente, bem como as relaciona melhor com as fórmulas de derivação aplicadas aos diferentes tipos de funções. A aluna revela uma compreensão relacional nas alíneas a) e b), mas, na alínea c) (Figura 0.117), devido à necessidade de relacionar com o conceito de função implícita, revela um nível de compreensão incipiente.

Conclusões relativas à segunda questão de investigação: Que características têm as aprendizagens realizadas pelos alunos ao longo do estudo de tópicos de Cálculo específicos?

De uma maneira geral, a aprendizagem dos alunos é caraterizada por níveis diferentes de compreensão e níveis diferentes de estrutura mental, dependendo dos subconceitos envolvidos no conceito considerado. Nestes termos, é uma aprendizagem heterogénea resultante de fatores como o nível de preparação dos alunos, empenho dos alunos e tipo de abordagem do Cálculo (atendendo à classificação de Tall quanto à abrangência e à profundidade de abordagem).

Nos alunos Amarildo, Amaro e Ana constatamos as ações 1 (coordenar a dependência de uma variável noutra variável) e 2 (coordenar a direção da mudança de uma variável com mudanças na outra variável) de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008, p. 36) nas análises às respostas, em questionário e em entrevista, dadas à questão 7 do questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos (Apêndice 3). Quanto às ações mentais 3 (coordenar a quantidade de mudança de uma variável com alterações na outra variável) e 5 (coordenar a taxa de variação instantânea da função com variações contínuas na variável independente para todo o domínio da função), constatamos no Amarildo na análise feita às suas respostas, em questionário e em entrevista, dadas à questão 10 do mesmo questionário. Em relação à ação mental 4 (coordenar a taxa média de variação da função com incrementos uniformes de variação na variável de entrada), não identificamos evidência do seu desenvolvimento pelos alunos.

Nas quatro perspetivas consideradas de abordagem ao Cálculo — algébrica, gráfica, numérica e descritiva —, em termos de avaliação, constatamos maior exploração e maior desenvolvimento da aprendizagem do Cálculo na perspetiva algébrica, onde por exemplo as resoluções da 1.ª e da 2.ª prova parcelares sustentam esta constatação. Na 1.ª prova parcelar apenas a 2.ª questão, por não ter a forma analítica da função, não requer resolução algébrica, mas sim interpretação gráfica. As demais questões são de resolução algébrica. Na 2.ª prova parcelar todas as questões são de resolução algébrica. A perspetiva gráfica tem uma exploração reduzida e as demais perspetivas apresentam uma exploração residual. Em termos de lecionação da unidade curricular Matemática I, na sala de aula, a perspetiva mais explorada é a algébrica, seguida da gráfica em menor proporção, tendo as demais uma exploração residual. Em termos cognitivos o desenvolvimento dos alunos é correspondente ao grau de exploração das perspetivas de abordagem do Cálculo, nas avaliações e na sala de aula. Os alunos têm maior domínio algébrico dos conteúdos, seguido do domínio gráfico e das outras duas perspetivas. Mais facilmente os alunos interpretam um fenómeno do ponto de vista algébrico e gráfico do que de qualquer outro. Portanto, é notória a influência do ensino sobre a aprendizagem.

Constatamos algumas dificuldades nos alunos, conforme descritas por Tall (1992) — imagem mental de função restrita; dificuldades em absorver novas ideias complexas em tempo limitado; consequente preferência dos alunos por métodos procedimentais em vez de compreensão concetual. Por exemplo, na resposta à questão 2 da 1.ª prova parcelar dada pela Ana (Figura 0.113), as dificuldades da sua imagem mental de função refletem-se na resolução que apresenta. A resposta dada à alínea 1c) da 2.ª prova parcelar pelo Amarildo (Figura 0.99) e pela Ana (Figura 0.117) reflete a dificuldade em absorver a ideia de função dada na forma implícita e relacioná-la com a ideia de derivada de uma função no tempo previsto no currículo.

Em síntese

Pudemos constatar, nesta tese, a tendência convergente para utilização da teoria APOS no estudo da aprendizagem do Cálculo. Autores como David Tall, Ed Dubinsky, Anna Sfard, António Domingos, Marilyn Carlson e María Trigueros cujas abordagens contribuíram para a nossa fundamentação tiveram na teoria APOS de Ed Dubinsky uma referência importante para o desenvolvimento das suas ideias. É caso para se inferir que desde a sua criação à data presente, a teoria APOS parece consolidar-se cada vez mais como ferramenta de análise.

A taxonomia PCC (Carlson, Madison, & West, 2015, p. 216), pelos estudos de validação feitos pelos seus autores e pela sua abrangência, constitui-se numa base importante para a elaboração de testes e questionários para aferir sobre o nível de preparação dos alunos para a frequência do Cálculo. Com ajuda da taxonomia PCC pode-se caraterizar o domínio que os alunos têm dos conceitos necessários para a aprendizagem do Cálculo. Apesar do reconhecido valor da taxonomia, os autores deixam aberta a possibilidade de ajustes aos testes e questionários que dela derivam no sentido de se adaptarem às condições e ao currículo considerados como referência. Fica clara a flexibilidade com que se pode elaborar instrumentos baseados no PCC, no entanto, sem perder a sua essência constante da sua taxonomia.

O conceito de função, e outros necessários para o domínio deste, na maior parte dos casos, não estão assimilados como objetos pelos alunos, mas sim como ações e como processos, o que dificulta a compreensão, a construção e, consequentemente, a assimilação de novos conceitos do Cálculo. Quanto mais incipiente for o domínio do conceito de função pelos alunos, menos aptos estarão para a frequência do Cálculo. Esta realidade notou-se no acúmulo de dificuldades das resoluções dos alunos ao transitarem pelas três secções estudadas (função, diferenciação e integração) do questionário de caraterização das suas estruturas cognitivas. Esta realidade é compreensível se atendermos ao facto de as funções serem o objeto de estudo do Cálculo, daí entende-se por que razão muito da aprendizagem do Cálculo anda em torno da aprendizagem do conceito de função. As dificuldades dos alunos prenderam-se com os níveis de desempenho à luz das teorias de maior referência no estudo, as teorias APOS e da Reificação. Os níveis de desempenho dos alunos são também aferidos por abordagens, suportadas pela teoria APOS, feitas por outros autores, nomeadamente: Dificuldades dos alunos na aprendizagem do Cálculo de Tall (1992); Compreensão de conceitos matemáticos avançados de Domingos (2003); Habilidades de raciocínio fundamental que promovem compreensão do conceito de função nos alunos de Oehrtman, Carlson, & Thompson (2008); Avaliação do Conceito de Pré-Cálculo e Prontidão do Conceito de Cálculo de Carlson, Oehrtman, & Engelke (2010). Estas abordagens expressam os seus fundamentos mediante caraterizações de dificuldades na aprendizagem dos alunos, visões e raciocínios tidos pelos alunos sobre funções, assim como mediante classificações dos níveis de conhecimento dos alunos sobre conceitos matemáticos prévios necessários para a frequência do Cálculo.

Os conhecimentos prévios manifestados pelos alunos sob quatro perspetivas — algébrica, numérica, gráfica e descritiva — pesaram consideravelmente no seu nível de aproveitamento posterior. Quando o conhecimento se manifesta ao nível de ação e sem o cumprimento de um plano extra de recuperação, a tendência é de o aluno ter um nível de aproveitamento fraco. Quando o conhecimento se manifesta ao nível de processo, ou superior, e com um empenho regular, a tendência é de o aluno ter um nível de aproveitamento bom.

Quanto maior for o número de conceitos capsulados pelo aluno maior e melhor será o desenvolvimento das suas aprendizagens. Nesta circunstância, a aprendizagem do aluno ocorre predominantemente ao nível de conceitos de Cálculo, sem precisar de recorrer com frequência à aprendizagem de conceitos de níveis inferiores, reduzindo consideravelmente a possibilidade de desconforto na reificação de novos conceitos. Quanto menos conceitos capsulados tiver o aluno menor e de menos qualidade será o desenvolvimento das suas aprendizagens. Nesta circunstância a aprendizagem do aluno ocorre predominantemente a nível das estruturas mentais ação e processo, de acordo com a Teoria APOS, e nas fases de interiorização e condensação, de acordo com a Teoria da Reificação. Atendendo que metodologicamente o contexto é de aprendizagem de conceitos do Ensino Superior e não de conceitos do Ensino Secundário, esta circunstância desencadeia um ambiente de aprendizagem desconfortável, resultando muitas vezes em fraca aprendizagem. A situação pode ser ultrapassada com a frequência de programas de recuperação levados a cabo paralelamente.

Como consequência do nível de compreensão que os alunos levam para a aprendizagem do Cálculo, as suas conceções antes, ao longo e depois da lecionação da unidade curricular diferem. As suas conceções são também influenciadas pela forma como se leciona o Cálculo, nomeadamente nível de profundidade com que os conteúdos são abordados, com ou sem demonstração, tópicos lecionados, bem como relação estabelecida entre os conteúdos lecionados e a área principal de formação. Para os alunos que manifestavam um nível de desempenho incipiente ou instrumental, pudemos constatar a expetativa de aprender novas situações típicas, exercícios típicos e “problemas” típicos, assim como a correspondente expetativa de aprender procedimentos típicos para a sua resolução. Esta conceção reflete-se na forma como os alunos aprendem o Cálculo, essencialmente caraterizada por Tall (1992) como sendo assente em dificuldades em absorver novas ideias complexas em tempo limitado e assente em manter os elementos conflituantes em compartimentos diferentes procurando nunca deixá-los estar simultanemante na parte consciente da mente. A tendência é que depois da lecionação da unidade curricular estes alunos tenham a conceção operacional mais desenvolvida que a estrutural.

As duas formas — (1) conciliar o antigo e o novo reconstruindo uma nova estrutura de conhecimento coerente; (2) manter os elementos conflitantes em compartimentos separados e nunca permitir que eles sejam trazidos simultaneamente para a mente consciente — referidas por Tall (1992) como sendo as de os alunos lidarem com dificuldades do cálculo de limites e com processos infinitos não se limitam aos conceitos indicados. Elas são também usadas para lidar com os outros conceitos do Cálculo, aliás, como se pode ver no tratamento aos dados. A primeira forma enquadra-se no conceito de adaptação de Jean Piaget e é uma marca das teorias cognitivas da aprendizagem. A segunda forma é um artifício usado pelos alunos como forma de contornar conceitos de base não reificados ou não capsulados. Nela memoriza-se, sem a conexão necessária, conceitos relacionados uns com os outros, tornando mais difícil a reificação ou o capsulamento de novos conceitos. É uma clara rutura dos ciclos previstos pelas teorias da Reificação e APOS, é uma quebra da reorganização e reconstrução de conceitos e de suas operações.

4.2 Limitações e Recomendações

Limitações

A predominante abordagem algébrica, na sala de aula, dos conceitos de função, derivada e de integral em detrimento de uma mais equilibrada abordagem gráfica, numérica e descritiva, repercutiu-se nos dados recolhidos, pois estes passaram a ser muito próximos à forma como eram tratados na sala de aula. Deste modo, a investigação apenas nos permitiu caraterizar e interpretar mais pormenorizadamente a aprendizagem de conceitos do Cálculo I representados algebricamente.

Apesar de, conforme se pode ler na Tabela 13, nas aulas práticas os alunos terem tido oportunidade de interagir em grupos formados segundo as suas preferências, o trabalho colaborativo poderia ter ultrapassado as fronteiras das aulas práticas, sendo um trabalho que surgisse nas aulas de introdução dos conceitos e se estendesse aos trabalhos dos alunos para além das aulas. Desta maneira, seriam mais diversos os meios de construção do conhecimento e teriam um maior enfoque na sua dimensão social.

Também resulta em limitação do estudo a necessidade de se prolongar o estudo no tempo para se poder dar maior profundidade e abrangência à inferição sobre os processos de construção de conhecimento como eles são referidos pelas teorias APOS e da Reificação. Ultrapassada esta limitação do estudo, haveria maior minúcia na descrição e na interpretação dos processos de construção de conhecimento.

Recomendações

O conhecimento da estrutura cognitiva dos alunos é de grande importância para a gestão da sua aprendizagem. Instrumentos como a taxonomia PCC, o currículo e informações sobre o contexto são ingredientes importantes para a construção de testes ou de questionários de aferição dos conceitos aprendidos pelos alunos. É importante e recomendável que, à partida da frequência do Cálculo, se caraterize o nível de compreensão dos conceitos dos alunos, constituindo um ponto de referência para a adequação tanto da atividade do docente como da atividade do aluno tendo em vista o sucesso na lecionação e na frequência do Cálculo. Com este exercício diagnóstico e com a comunicação dos seus resultados aos interessados, particularmente aos alunos, parte-se consciente do que há por fazer para o alcance do sucesso académico.

Feito o diagnóstico, atendendo que as estruturas cognitivas não são homogéneas, é de todo recomendável que se indique trabalho específico para elevação do nível de compreensão dos conceitos identificados como débeis.

BIBLIOGRAFIA

APA. (2012). *APA Style Guide to Electronic References* (6ª ed.). Washington, DC: APA (American Psychological Association).

APA. (2012). *Manual de Publicação da APA* (6ª ed.).

APA. (2013). *Publication manual* (6ª (edição eletrónica) ed.). Washington, DC: APA (American Psychological Association).

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* Springer.

Artigue, M. (1996). Engenharia Didática. *Didática das Matemáticas*.

Ausubel, D. P. (2000). *The acquisition and retention of knowledge: A cognitive view.* (L. Teopisto, Trad.) Kluwer Academic Publishers.

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1980). *Psicologia Educacional.* (E. N. al., Trad.) Rio de Janeiro: Interamericana. (Livro original publicado em 1978).

Bachelard, G. (2002). *The Formation of the Scientific Mind.* (M. M. Jones, Trad.) Paris: Clinamen Press. (Obra original publicada em 1938 por Librairie Philosophique).

Bada, S. O. (Nov.-Dez. de 2015). Constructivism Learning Theory: A Paradigm for Teaching and Learning . *IOSR Journal of Research & Method in Education, 5*, 66-70.

Berman, G. (1977). *Problemas e Ejercicios de Análisis Matemático.* Moscovo: Mir.

Boavida, A. M. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração.* Liboa: Universidade de Lisboa.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto, Portugal: Porto Editora.

Breidenbach, D. D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 247-285.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9 (3)*.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Springer.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao Estudo da Teoria das Situações Didáticas.* São Paulo: Ática.

Brousseau, G. (Agosto de 2013). Contrato didático: o "não dito" é essencial. *Nova Escola*.

Bussi, M., & Mariotti, M. (2008). Semiotic mediation in the mahtematics classroom: Artefacts an signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education*, 746-783.

Carlson, M. P., Madison, B., & West, R. D. (2015). A Study of Students' Readiness to Learn Calculus. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(2), 209–233.

Carlson, M., & Rasmussen, C. (2008). *Making the Conection: Research to Practice in Undergraduate Mathematics Education.* Mathematical Association of America.

Carlson, M., Oehrtman, M., & Engelke, N. (2010). The Precalculus Concept Assessment: A Tool for Assessing Students' Reasoning Abilities and Understandings. *Cognition and Instruction, 28*(2), 113–145.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición Didáctica: Del saber sabido al saber enseñado.* Aique.

Cohen, B., & Lea, B. (2004). *Essentials of Statistics for the Social and Behavioral Sciences.* (A. Kaufman, & N. Kaufman, Edits.) New Jersey, EUA: Wiley and Sons.

Coutinho, C. P. (2014). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática* (2ª ed.). Coimbra: Almedina.

Creswell, J. W. (2014). *Research Design* (4ª ed.). (SAGE, Ed.)

Demidovitch, B., & et al. (1967). *Problemas e Exercícios de Análise Matemática.* Moscovo: Mir.

Domingos, A. M. (2003). *Compreensão de Conceitos Matemáticos Avançados -- A Matemática no Início do Superior.* Lisboa: Universidade Nova de Lisboa.

Douady, R. (1984). *Didactique des Mathématiques*. Obtido de https://www.universalis.fr/encyclopedie/mathematiques-didactique-des/ (consultado em 23 de novembro de 2018).

Douady, R. (1986). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.*

Downes, S. (3 de Fevereiro de 2007). *http://halfanhour.blogspot.com/2007/02/what-connectivism-is.html*.

Dubinsky, E. (1991). The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. (L. P. Steffe, Ed.) *Epistemological foundations of mathematical experience*.

Dubinsky, E. (2002). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. Em D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Cambridge: Kluwer Academic Publisher.

Dubinsky, E. W. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The Case of 0.999. . . and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 13(3)*.

Engestrom, Y., Miettinen, R., & Punamaki, R.-L. (s.d.). *Perspectives on Activity Theory.* Cambridge University Press.

English, L. (2005). Theory of mathematics education. *Proceedings of 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 170-202.

Erlandson, D., Harris, E., Skipper, B., & Allen, S. (1993). *Doing Naturalistic Inquiry: A Guide to Methods.* Newbury Park: Sage Publications.

Flemming, D. M., & Gonçalves, M. B. (s.d.). *Cálculo A — Funções, Limite, Derivação e Integração.* (6.ª ed.). Pearson.

Freitag, B. (1993). Aspectos filosóficos e sócio-antropológicos do construtivismo pós-piagetiano. Em E. P. Grossi, & J. Bordim, *Construtivismo pós-piagetiano: um novo paradigma de aprendizagem* (pp. 26-34). Petrópolis: Vozes.

Henriques, A. C. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação.* Lisboa: Universidade de Lisboa.

Hernández, J. (2012). *Análisis de la Práctica del Docente Universitário de Precálculo. Estudios de Casos en la Enseñanza de las Funciones Exponenciales.* Salanca: Universidade de Salamanca.

Heron, J., & Reason, P. (1997). A participatory inquiry paradigm. Qualitative Inquiry.

Hill, A., & Hill, M. M. (2012). *Investigação por Questionário.* Lisboa: Edições Sílabo.

Hoffmann, L., Bradley, G., Sobecki, D., & Price, M. (2013). *Applied Calculus for Business, Economics, and the Social and Life Sciences* (11ª ed.). McGraw Hill.

INIDE. (2013). *Currículo do 2.º Ciclo do Ensino secundário GERAL* (3ª ed.). (J. Z. Altunaga, Ed.) Luanda: Editora Moderna.

INIDE. (2013). *Programa de Matemática -- 10ª Classe. Área de Ciências Económico-Jurídicas* (2ª ed.). Luanda: Editora Mdoerna.

INIDE. (2013). *Programa de Matemática -- 10ª Classe. Área de Ciências Físicas e Biológias* (2ª ed.). Luanda: Editora Moderna.

INIDE. (2013). *Programa de Matemática -- 10ª Classe. Área de Ciências Humanas* (2ª ed.). Luanda: Editora Moderna.

INIDE. (2013). *Programa de Matemática -- 11ª Classe. Área de Ciências Económico-Jurídicas* (2ª ed.). Luanda: Editora Moderna.

INIDE. (2013). *Programa de Matemática -- 11ª Classe. Área de Ciências Físicas e Biológicas* (2ª ed.). Luanda: Editora Moderna.

INIDE. (2013). *Programa de Matemática -- 11ª Classe. Área de Ciências Humanas* (2ª ed.). Luanda: Editora Moderna.

INIDE. (2013). *Programa de Matemática -- 12ª Classe. Área de Ciências Físicas e Biológicas* (2ª ed.). Luanda: Editora Moderna.

Jófili, Z. (Dezembro de 2002). Piaget, Vygotsky, Freire e a construção do conhecimento na escola. *Educação: Teorias e Práticas*.

Khun, T. S. (1998). *A Estrutura das Revoluções Científicas.* São Paulo: Editora Perspctiva. (Livro original publicado em 1962).

Kilpatrick, J. (2010). Preface to Part I. Em S. Bharath, & L. English, *Theories of Mathematics Education.* Berlin: Springer.

Kozulin, A., Gindis, B., Ageyev, V. S., & Miller, S. M. (2003). *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context.* Cambridge: Cambridge University Press.

Kuhn, T. (2012). *The Structure of Scientific Revolution.* Chicago and London: The University of Chicago.

Laborde, C. (2007). Towards theoretical foundations of mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*, 137–144.

Lakatos, I., Worrall, J., & Zahar, E. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge University Press.

Lincoln, Y., & Guba, E. (1991). *Naturalistic Inquiry.* New York: Sage.

Linstone, H., Turoff, M., & Helmer, O. (2002). *The Delphi Method.*

Machado, S. D. (1999). Engenharia Didática. *Educação Matemática — Uma Introdução*, 115-134.

Maranhão, M. C. (2010). Dialética, Ferramenta e Objeto. *Educação Matemática — Uma Introdução*.

Marconi, M. A., & Lakatos, E. M. (2003). *Fundamentos de Metodologia Científica* (5ª Edição ed.). São Paulo: Editora Atlas.

Mendelson, E. (1988). *3000 Solved Problems in Calculus.* McGraw Hill.

Merriam, S. B. (1988). *Case Study Research in Education: A Qualitative Approach.* Jossey-Bass.

Miles, M. B., Huberman, M., & Saldaña, J. (2014). *Qualitative data analysis: a methods sourcebook* (3ª ed.). California: SAGE.

Moreira, J. M. (2009). *Questionários: Teoria e Prática.* Coimbra: Almedina.

Moreira, M. A. (2006). *A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.* Brasília: Universidade de Brasília.

Newman, I., & Benz, C. R. (1998). *Qualitative-quantitative research methodology: Exploring the interactive continuum.* Carbondale and Edwardsville: Southern Illinois University Press.

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. Em M. P. Carlson, & C. Rasmussen, *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 27-42). Washington DC: Mathematical Association of America.

Pais, L. C. (2002). *Didática da Matemática — Uma análise da influência francesa* (2.ª ed.). Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

Piaget, J. (1974). *Biology and Knowledge.* University of Chicago Press. (Livro original publicado em 1967).

Piaget, J. (1986). *O Nascimento da Inteligência na Criança.* Publicações Dom Quixote. (Livro original publicado em 1971).

Piaget, J., & Beth, E. (1974). *Mathematical Epistemology and Psychology.* Springer.

Poeschl, G. (2006). *Análise de Dados na Investigação em Psicologia: Teoria e Prática.* Coimbra: Almedina.

Polya, G. (2014). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method.* Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2008). A Investigação em Educação Matemática em Portugal: Realizações e Perspectivas. Em *Investigación en Educación Matemátca* (Vol. XII, pp. 55-78). Badajoz: SEIEM.

Ponte, J. P., Abrantes, P., & Matos, J. M. (1998). *Investigação em Educação Matemática. Implicações Curriculares.* Lisboa.

Sacristán, J. G. (1998). *O Currículo: uma reflexão sobre a prática.* Porto Alegre: Artmed.

Salas, S., Hille, E., & Etgen, G. (2007). *Calculus: one and several variables* (10ª ed.). New Jersey: Wiley.

Saldaña, J. (2013). *The coding manual for qualitative researchers* (2ª ed.). California: SAGE.

Santana, J. (2006). *Educação Matemática. Favorecendo Investigações Matemáticas através do Computador.* Fortaleza: Universidade Federal do Ceará -- Faculdade de Educação.

Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the AMS, 47 (Número 6)*, 641-649.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*.

Siegel, H. (Janeiro de 2010). *Introduction: Philosophy of Education and Philosophy*. Obtido de http://www.oxfordhandbooks.com: http://www.oxfordhandbooks.com/view/10.1093/oxfordhb/9780195312881.001.0001/oxfordhb-9780195312881-e-001

Siemens, G. (Janeiro de 2005). *http://www.itdl.org/journal/jan_05/article01.htm*.

Siemens, G. (2006). *Knowing Knowledge.* Lulu.com.

Sriraman, B., & English, L. (2010). *Theories of Mathematics Education.* Berlin: Springer.

Stewart, J. (2012). *Calculus* (7ª ed.). Belmont: Thomson.

Tall, D. (Agosto de 1992). Students' Difficulties in Calculus. *Plenary presentation in Working Group 3, ICME*, 15.

Tall, D. (2002). Reflections. Em D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 254-259). Cambridge: Kluwer Academic Publishers.

Tam, M. (2000). Constructivism, Instructional Design, and Technology. Implications for Transforming Distance Learning. *Educational Technology and Society, 3 (2)*.

Trigueros, M., & Jacobs, S. (2008). On Developing a Rich Conception of Variable. Em M. Carlson, & C. Rasmussen, *Making the Connection: Research to Practice in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 3-11). Mathematical Association of America.

Trigueros, M., & Usini, S. (2003). Starting college students' difficulties in working with different uses of variable. Em *Research in Collegiate Mathematics Education. CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 1-29). Providence, RI: American Mathematical Society.

Urbina, S. (2014). *Essentials of Psychological Testing* (2ª ed.). (A. Kaufman, & N. Kaufman, Edits.) New Jersey, EUA: John Wiley & Sons.

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations the´oriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2 (2)*, 215–231.

Vergnaud, G. (1994). Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, 177-191.

Vieira, A. F. (2013). *Ensino do Cálculo Diferencial e Integral: das técnicas ao humans-with-media.* São Paulo: Universidade de São Paulo.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and Language.* MIT.

Weller, K. A. (2011). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: Strength and stability of belief. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 11*, 129-159.

APÊNDICES

Apêndice 1: Questionário de caraterização dos alunos

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Faculdade de Ciências

Departamento de Matemática

3º CICLO DE ESTUDOS EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO DIRIGIDO A ALUNOS

Estimado Estudante,

O presente questionário tem como objetivo colher a sua opinião sobre a aprendizagem do Cálculo, no âmbito de uma investigação intitulada "Aprendizagem do Cálculo para economistas. Estudo de caso de alunos no primeiro ano de cursos superiores de economia" para a obtenção do grau de Doutor em Didática da Matemática pela Universidade da Beira Interior. As informações colhidas através deste instrumento, o seu tratamento, bem como as conclusões dele tiradas constarão do relatório final, livro de tese, da referida investigação. Esteja descansado(a) quanto à confidencialidade, pois esta está garantida.

Gostaríamos de contar com o seu prestimoso contributo, pelo que solicitamos que responda com clareza e objetividade.

Nome completo: ____

Idade: ______

1. Curso que frequentou:

- Que formação fez no Ensino Secundário?
- Ciências Económicas e Jurídicas ☐
- Ciências Físicas e Biológicas ☐
- Ciências Humanas ☐
- Curso Médio de Contabilidade ☐
- Curso Médio de Estatística ☐
- Curso Médio de Eletricidade ☐
- Curso Médio de Agronomia ☐
- Curso Médio de Técnico de Informática ☐
- Outro ☐. Qual? ____

2. Quantos anos letivos ficou sem estudar Matemática antes de ingressar no Ensino Superior?

a) 1 ano ☐;	b) 2 anos ☐;	c) 3 anos ☐;	d) 4 anos ☐;
e) 5 anos ☐;	f) 6 anos ☐;	g) 7 anos ☐;	h) 8 anos ☐;
i) 9 anos ☐;	j) 10 anos ☐;	k) 11 anos ☐;	l) 12 anos ☐;
m) 13 anos ☐;	n) 14 anos ☐;	o) 15 anos ☐;	p) 16 anos ☐;
q) 17 anos ☐;	r) 18 anos ☐;	s) 19 anos ☐;	t) 20 ou mais anos ☐.

3. Em média, durante quantas horas estuda em casa por dia?

____

4. Em que consiste a sua metodologia de aprendizagem?

____
____
____
____
____
____
____
____
____

5. Qual é a bibliografia (livros, vídeos, sítios da Internet, etc.) de apoio à cadeira que utiliza?

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

6. Que conhecimento dos seguintes temas, numa escala de 1 a 5, tem para a frequência do curso?

TEMA	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Funções	☐	☐	☐	☐	☐
Aplicação de funções	☐	☐	☐	☐	☐
Derivação	☐	☐	☐	☐	☐
Aplicação da derivação	☐	☐	☐	☐	☐
Integração	☐	☐	☐	☐	☐
Aplicação da integração	☐	☐	☐	☐	☐

7. Que importância a Matemática tem para si?

8. Que importância a Matemática tem para o seu curso?

9. Trabalha? Sim ☐ Não ☐

10. Em quê que trabalha?

11. Que importância a Matemática tem para o seu trabalho?

12. De 0 a 10 escolha um número que melhor represente o seu gosto pela Matemática: ___________ Justifique a sua escolha:

13. Em que proporção (em percentagem) os seguintes fatores influenciam o seu aproveitamento em Matemática? (Observação: O somatório das percentagens dos fatores deve ser igual a 100%)

FACTORES	**PROPORÇÃO**
Formação do aluno	
Importância da Matemática para si	
Tempo sem estudar Matemática	
Importância da Matemática para o seu curso	
Importância da Matemática para o seu trabalho	
Preferência pessoal	
Metodologia das aulas	
Relação professor-estudante	
Equipamentos/Material escolar	
Metodologia de aprendizagem	
TOTAL	**100%**

14. Se tem a perceção de que ficou algo por dizer, tenha a bondade de servir-se das linhas seguintes para descrever:

OBRIGADO PELA SUA PARTICIPAÇÃO.

Apêndice 2: Guião da entrevista de caraterização dos alunos

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Faculdade de Ciências

Departamento de Matemática

3º CICLO DE ESTUDOS EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

GUIÃO DA ENTREVISTA DIRIGIDA A ALUNOS

Averiguar e enriquecer as descrições dos alunos sobre:

1. A influência da sua formação na sua aprendizagem:

2. A influência da importância que atribui à Matemática na sua aprendizagem:

3. A influência do tempo sem estudar Matemática na sua aprendizagem.

4. A influência do reconhecimento da importância que a Matemática tem para o seu curso.

5. A influência do reconhecimento da importância que a Matemática tem para o seu trabalho.

6. A influência que reconhece do seu gosto pela Matemática.

7. A influência que reconhece da metodologia utilizada ao longo das aulas.

8. A influência que reconhece da relação professor-aluno.

9. A influência que reconhece dos equipamentos e materiais escolares.

10. A influência que reconhece da metodologia de aprendizagem.

Apêndice 3: Questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Faculdade de Ciências

Departamento de Matemática

3º CICLO DE ESTUDOS EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO DIRIGIDO A ALUNOS

Nome completo: ____

Idade: ______

Função

1. O que entende por função?
2. Dada a função $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$:

a) Determine a sua imagem nos pontos 2, $\frac{1}{2}$, -2 e 0;

b) Determine o seu domínio.

3. Dada a função $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1 & se\ x \leq 1 \\ \frac{1-\sqrt{x}+\cos(x-1)}{1-x} & se\ x > 1 \end{cases}$:

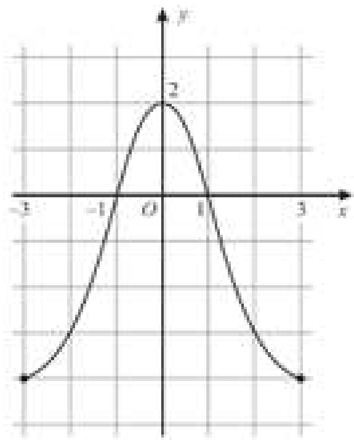
a) Determine a sua imagem nos pontos 1 e 0;

b) Determine o seu domínio.

4. Considere as funções $f(x) = \frac{x}{x-1}$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Determine:

a) a) $f \circ g$; b) $g \circ f$.

5. Seja f com o domínio $\mathrm{D} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} | -3 \leq \mathrm{x} \leq 3\}$ e o gráfico seguinte:



Seja $g(x) = \cos x$. Indique as soluções da equação $(f \circ g)(x) = 0$:

a) $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$; b) $S = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$; c) $S = \{0, \pi\}$; d) $S = \{-\pi, \pi\}$.

6. Considere a tabela seguinte:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

Determine:

a) $f(g(1))$; b) $(f \circ g)(6)$; c) $g(g(1))$; d) $(g \circ f)(3)$

Diferenciação

7. O que entende por derivação?
8. Derive $f(x) = (x^2 - 4)^3 + 5$.
9. Seja f uma função cuja derivada, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $f'(x) = (4 + x)^2$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

a) O gráfico da função f é côncavo em $\mathbb{R}$.

b) A função f tem um máximo relativo em $x = -4$.

c) O gráfico da função não tem pontos de inflexão.

d) O gráfico da função tem um ponto de inflexão de coordenada $(-4, f(-4))$.

10. A quantidade (em quilogramas) de café vendida por uma companhia a uma lanchonete ao preço de p kwanzas por quilograma é dada por $Q = f(p)$.

a) Qual é o significado da derivada $f'(6)$?

b) $f'(6)$ é positivo ou negativo? Justifique.

Integração

11. O que entende por integração?
12. Calcule $\int \mathrm{x}\sqrt{1 + \mathrm{x}^2}\mathrm{dx}$.
13. Seja $\mathrm{r(t)}$ a taxa de do consumo mundial de petróleo, onde t é medido em anos começando em $\mathrm{t} = 0$ em 1 de Janeiro de 2000 e $\mathrm{r(t)}$ é medida em barris por ano. O que representa $\int_0^8 \mathrm{r(t)dt}$?

Apêndice 4: Respostas ao questionário de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos

1. Esperava-se aqui uma ideia o mais aproximada possível da definição de função, não necessariamente uma definição com todo o rigor que encerra.

2.a)

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

$$f(2) = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{2}+2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$f(-2) = \frac{-2+1}{-2+2} = \frac{-1}{0} \nexists$$

$$f(0) = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

2.b)

$$x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \therefore D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -2\}$$

3.a)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1 & se\ x \leq 1 \\ \dfrac{1 - \sqrt{x} + \cos(x-1)}{1-x} & se\ x > 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 1^3 + 2 \times 1 + 1 \Leftrightarrow f(1) = 4$$

$$f(0) = 0^3 + 2 \times 0 + 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$$

3.b) $D_f = \mathbb{R}$

4.a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ $g(x) = \sqrt[3]{x}$

$(f \circ g)(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}$ $(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}$

5.c) $S = \{0, \pi\}$

6.a) $f\big(g(1)\big) = f(6) = 5$

6.b) $(f \circ g)(6) = f(g(6)) = f(3) = 4$

6.c) $g(g(1)) = g(6) = 3$

6.d) $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4) = 1$

7. Esperava-se aqui uma ideia o mais aproximada possível da definição de derivada de uma função, não necessariamente uma definição com todo o rigor que encerra.

8. $f(x) = (x^2 - 4)^3 + 5 \Rightarrow f'(x) = 3(x^2 - 4)^2 \cdot (x^2 - 4)' \Rightarrow f'(x) = 3(x^2 - 4)^2 \cdot 2x$

$\Rightarrow f'(x) = 6x(x^2 - 4)^2$

9. d)

10.a) Trata-se da variação da quantidade de café vendida à lanchonete quando o preço toma o valor de 6,00 KZ

10.b) Depende das quantidades anteriores e posteriores àquela que se obtém quando o preço é 6,00 KZ. Ou seja, depende do valor de $Q = f(p)$ na vizinhança $V_\varepsilon(6)$.

11. Esperava-se aqui uma ideia o mais aproximada possível da definição de integral de uma função, não necessariamente uma definição com todo o rigor que encerra.

12. $\int x\sqrt{1 + x^2}dx =$

Substituindo $1 + x^2$ por t, tem-se: $dt = 2xdx \Leftrightarrow \frac{dt}{2} = xdx$

$$\int x\sqrt{1 + x^2}dx = \int \sqrt{1 + x^2} \cdot xdx$$

$$\int x\sqrt{1 + x^2}dx = \int \sqrt{t} \cdot \frac{dt}{2}$$

$$\int x\sqrt{1 + x^2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt$$

$$\int x\sqrt{1 + x^2}dx = \frac{1}{2}\int t^{1/2}dt$$

$$\int x\sqrt{1 + x^2}dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1} + C$$

$$\int x\sqrt{1 + x^2}dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{\sqrt{t^2}}{3} + C$$

Substituindo t por $1 + x^2$, tem-se: $\int x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} + C$

13. $\int_0^8 \mathrm{r(t)dt}$ representa a soma dos barris consumidos de 2000 a 2008.

Apêndice 5: Guião da entrevista de caraterização da estrutura cognitiva dos alunos

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Faculdade de Ciências

Departamento de Matemática

3º CICLO DE ESTUDOS EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

GUIÃO DA ENTREVISTA DIRIGIDA A ALUNOS

Averiguar e enriquecer as descrições dos alunos sobre:

A influência da sua formação na sua aprendizagem:

Apêndice 6: Grelha de observações feitas ao longo de aulas

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Faculdade de Ciências

Departamento de Matemática

3º CICLO DE ESTUDOS EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

GRELHA DE OBSERVAÇÕES

Nome do aluno: ____

Idade: ______

1. Assiduidade

a) 0% ☐ b) 25% ☐ c) 50% ☐ d) 75% ☐ e) 100% ☐

2. Relacionamento interpessoal

3. Relacionamento intrapessoal

4. Compreensão do conceito de função

5. Compreensão do conceito de derivação

6. Compreensão do conceito de integração

Apêndice 7: Credencial

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Faculdade de Ciências

Departamento de Matemática

3º CICLO DE ESTUDOS EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

CREDENCIAL

Para efeitos de realização de uma investigação intitulada “Aprendizagem do Cálculo para economistas. Estudo de caso de alunos no primeiro ano de cursos superiores de Economia” em instituições angolanas para obtenção do grau académico de Doutor em Didática da Matemática;

A Faculdade de Ciências da Universidade da Beira Interior em Covilhã, Portugal, através da direção do curso afeto ao Departamento de Matemática, credencia o Mestre Jorge Dias Veloso, aluno D1169, passaporte n.º N1174808, matriculado no 3º ano do 3º Ciclo de Estudos em Didática da Matemática.

Covilhã, aos 25 de Junho de 2015

O Orientador

____

Prof. Doutor António Domingos

(Prof. Auxiliar da Universidade Nova de Lisboa)

O Diretor do Curso

____

Prof. Doutor Rui Pacheco

(Prof. Auxiliar da Universidade da Beira Interior)

ANEXOS

Anexo I: Programa de Matemática I

UNIVERSIDADE MANDUME YA NDEMUFAYO
ESCOLA SUPERIOR POLITÉCNICA DO NAMIBE

1. Unidade Curricular

1.1. Área Científica: Ciências da Gestão e Administração (Nuclear)

1.2. Tipo (duração): Semestral 1.3. Ano/Semestre: 1.º A/1.º S

1.4. Tempo de trabalho (horas):

Horas Semanais					Total de Horas		
T	TP	P	TC	OT	Semana	Semestre	Ano
	2	4			6	90	

T — Aulas teóricas;
TP — Aulas teórico-práticas;
P — Aulas práticas, aulas de laboratório;
TC — Aulas de campo;
OT — Orientação tutorial;

2. Requisitos e Precedências

Noções básicas sobre trabalho com variável e resolução de equações lineares.

3. Competências

- Resolver problemas matemáticos e da vida prática;
- Desenvolver e aprofundar conhecimentos científicos;
- Resolver problemas que desenvolvam as capacidades de análise e síntese;
- Desenvolver hábitos de pesquisa, organização e validação de resultados;
- Reconhecer a Matemática como actividade humana permanente;
- Promover a aquisição de matérias que permitam dominar duma forma abrangente o conhecimento da Matemática a aplicar no dia a dia.

4. Conteúdos

Aulas teórico-práticas

Unidade I: Sucessões

1.1 Algumas noções topológicas. Vizinhança em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{R}^2$, ponto interior e exterior a um conjunto. Noção de distância em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{R}^2$, aplicação de função.

1.2 Definição de uma sucessão

1.3 Limite de uma sucessão

1.4 Critérios de convergência e de divergência

Unidade II: Limite de uma função real de variável real

2.1 Definição

2.2 Limites. Limites laterais

2.3 Propriedades e cálculo dos limites

2.4 Número de Néper

Unidade III: Funções contínuas e descontínuas em $\mathbb{R}$

3.1 Definição de continuidade

3.2 Continuidade lateral

3.3 Descontinuidade

Unidade IV: Derivadas

4.1 Definição

4.2 Derivadas laterais

4.3 Regras e fórmulas de derivação

4.4 Regra da cadeia

4.5 Derivação de funções logarítmicas e exponenciais

4.6 Derivadas de ordem superior

4.7 Estudo de uma função

4.8 Aplicações económicas das derivadas

Unidade V: Integrais

5.1 Noções e definição

5.2 Integração indefinida

5.3 Integração por substituição

5.4 Integração por partes

5.5 Integração definida

5.6 Fórmula de Newton-Leibniz

5.7 Integração imprópria

5.8 Definição

5.9 Integrais impróprias de 1.ª e 2.ª espécie

Unidade VI: Séries

Aulas práticas

Serão desenvolvidas com exercícios, problemas e casos selecionados que contribuam para que os estudantes consigam alcançar os objectivos preconizados.

5. Metodologia de ensino e de aprendizagem

As aulas será oreforçadas com o emprego de métodos activos, o método de elaboração conjunta e orientação e controlo do estudo independente, aulas práticas individuais e em equipa com atenção às diferenças individuais.

6. Modo de avaliação

Avaliação sistemática: participação em aulas, controlo de trabalho independente e perguntas escritas.

Avaliação periódica: com duas provas parciais;

Avaliação final: exame final escrito. Estaraõ isentos deste exame todos os estudantes que concluírem as provas parciais com uma média igual ou superior a 14 valores.

7. Bibliografia:

Boulos, P., & Abud, Z. I. (2002). *Cálculo Diferencial e Integral.* Pearson Education.

Chiang, A. C., & Wainwright, K. (s.d.). *Matemática para Economistas* (4.ª ed.). Campus.

Demidovitch, B., & et al. (1967). *Problemas e Exercícios de Análise Matemática.* Moscovo: Mir.

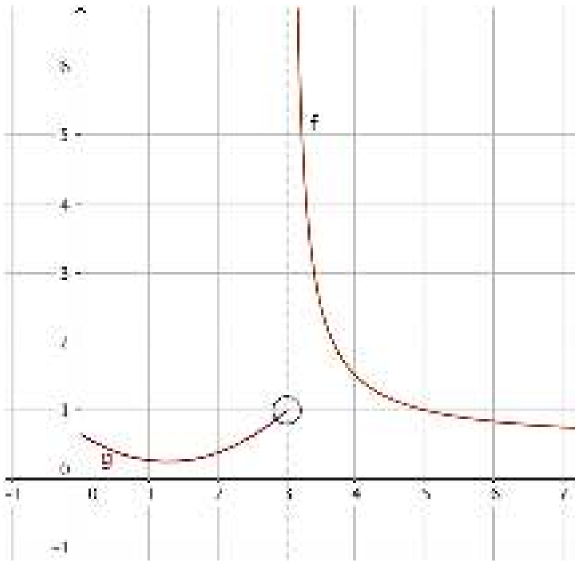
Flemming, D. M., & Gonçalves, M. B. (s.d.). *Cálculo A — Funções, Limite, Derivação e Integração.* (6.ª ed.). Pearson.

Piskunov, N. (1977). *Cálculo Diferencial e Integral* (3.ª ed., Vol. I). Moscovo: Mir. Analise

Anexo II: 1.ª Prova Parcelar

UNIVERSIDADE MANDUME YA NDEMUFAYO
ESCOLA SUPERIOR POLITÉCNICA DO NAMIBE

1. Sabendo que o primeiro termo de uma progressão aritmética é -3 e a razão é 6, calcule o 18.º termo da sucessão.
2. Dado o gráfico



a) Analisar se existe continuidade no ponto $\mathrm{x} = 3$;

b) Caso exista, indicar o tipo de descontinuidade.

3. Calcular:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2-2}{2n^3-1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{2x-2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$.

A professora

Anexo III: 2.ª Prova Parcelar

UNIVERSIDADE MANDUME YA NDEMUFAYO
ESCOLA SUPERIOR POLITÉCNICA DO NAMIBE

1. Derive as funções seguintes:

a) $f(x) = 4x^6 - \sin x + x\cos x$;

b) $y = \frac{4x-5}{x-2}$;

c) Achar y' para $3x + e^{xy} - 3y = 0$.

2. Determine a equação da reta tangente à curva $f(x) = x^4 + x$ em $x = 3$.

3. Dada a função que representa o custo de um produto de uma fábrica A. Determine o custo marginal para $x = 4$.

$$c(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 10$$

A professora