LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA Y SU INFLUENCIA EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO

La importancia del estudio y dominio de la matemática como ciencia desborda los límites académicos, en tanto su aplicación es visible en la cotidianidad del ser humano. De ahí la importancia de perfeccionar los mecanismos que se utilizan para su enseñanza en los centros educacionales, máxime si contribuye al desarrollo del pensamiento de los estudiantes. El presente libro busca acercar a los lectores a esta temática, mediante reflexiones profundas organizadas en tres capítulos.

MSc. Wilmer Adolfo Ortiz Choez
Máster en Diseño Curricular por Competencias. Ingeniero de Sistemas Computacionales. Su experiencia laboral abarca el ámbito empresarial ecuatoriano e instituciones docentes. Ha publicado artículos científicos, relacionados con su especialidad y participado en diversos eventos nacionales e internacionales. Actualmente imparte docencia en la carrera Turismo y Hotelería, Universidad Estatal de Guayaquil.

MSc. Ignacia de los Angeles Torres Villegas
Máster en Docencia Universitaria e Investigación Educativa. Ingeniera Civil. Especialista en Geotecnia. Ha tutorado varias tesis de grado relacionadas con su especialidad y publicado diversos artículos científicos. Posee experiencia como docente e investigadora. Actualmente labora en la Universidad de Guayaquil.

MSc. Wilber Ortiz Aguilar
Máster en Ciencias de la Educación. Licenciado en Educación, especialidad Matemática-Computación. Ha publicado artículos científicos y laborado como docente en instituciones de educación superior. Actualmente imparte Matemática en la carrera Ingeniería en Networking y Telecomunicaciones, Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas, Universidad de Guayaquil.

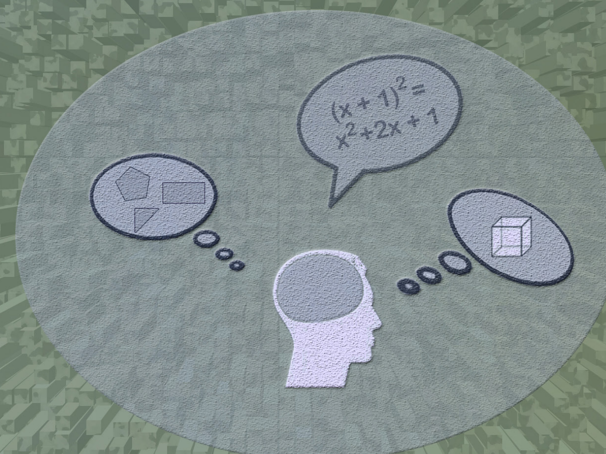
ISBN: 978-959-7225-25-6
9 789597 225256

EDACUN
EDITORIAL ACADÉMICA UNIVERSITARIA

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA Y SU INFLUENCIA EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO

EDITORIAL ACADÉMICA UNIVERSITARIA

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA Y SU INFLUENCIA EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO



Wilmer Adolfo Ortiz Choez
Ignacia De Los Angeles Torres Villegas
Wilber Ortiz Aguilar

UNIVERSIDAD DE LAS TUNAS

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA Y SU INFLUENCIA EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO

MSc. Wilmer Adolfo Ortiz Choez

MSc. Ignacia De Los Angeles Torres Villegas

MSc. Wilber Ortiz Aguilar

EDACUN

Diseño y Edición: MSc. Osmany Nieves Torres. As.

Corrección: MSc. Miriam Gladys Vega Marín. As.

Dirección General: Dr. C. Ernan Santiesteban Naranjo. P.T.

ISBN: 978-959-7225-25-6

Editorial Académica Universitaria (Edacun)

Universidad de Las Tunas

Ave. Carlos J. Finlay s/n

Código postal: 75100

Las Tunas, 2017

THOMSON REUTERS

Emerging Sources Citation Index

WEB OF SCIENCE™

DOAJ DIRECTORY OF OPEN ACCESS JOURNALS

EDACUN

ÍNDICE

Capítulo 1 Conceptualización de la Matemática y su Didáctica

1.1 La Matemática: definición y conceptualización

Matemáticas, viene del griego “mathema”, en latín “mathematium”, que significa conocimiento. Se le atribuye el estudio de las relaciones entre cantidades, magnitudes y propiedades, y de las operaciones lógicas utilizadas para deducir cantidades, magnitudes y propiedades desconocidas. En el pasado, las matemáticas eran consideradas como la ciencia de la cantidad, referida a las magnitudes (como en la geometría), a los números (como en la aritmética), o a la generalización de ambos (como en el álgebra).

Hacia mediados del siglo XIX las matemáticas se empezaron a considerar como la ciencia de las relaciones, o como la ciencia que produce condiciones necesarias. Esta última noción abarca la lógica matemática o simbólica —ciencia que consiste en utilizar símbolos para generar una teoría exacta de deducción e inferencia lógica basada en definiciones, axiomas, postulados y reglas que transforman elementos primitivos en relaciones y teoremas más complejos.

Sin embargo, la matemática podría definirse sintéticamente como la ciencia del razonamiento deductivo de las relaciones espaciales y de las magnitudes. En este sentido, Murillo De León y Cerda (2000) aluden a que constituye una actividad de resolución de situaciones problemáticas de una cierta índole, socialmente compartida. Estas situaciones problemáticas se pueden referir al mundo natural y social, o bien pueden ser internas a la propia matemática; como respuesta o solución a estos problemas externos o internos surgen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías).

Las matemáticas son un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones problemáticas y las soluciones encontradas. Al igual que la música son un lenguaje universal en el que los signos empleados, su semántica y sintaxis son compartidos en los diferentes grupos humanos. Como todo lenguaje implica unas reglas de uso que hay que conocer y su aprendizaje ocasiona dificultades similares al aprendizaje de otro lenguaje no materno.

Las matemáticas constituyen situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática conceptual, lógicamente organizadas y socialmente compartidas. La organización lógica de los conceptos, teoremas y propiedades explican también gran número de las dificultades en el aprendizaje; una de dichas situaciones típicas no puede reducirse a sus componentes aislados, ya que las interrelaciones entre los mismos son una parte esencial.

En este sentido, es significativo acotar, que en el primer caso, cada vez que uno se enfrenta a las actividades cotidianas o situaciones problemáticas, la matemática juega un papel importante para la solución de las mismas ya que ella está presente en las acciones que van desde comprar un artículo hasta diseñar un plano o quizás calcular nuestros gastos. El mundo natural está lleno de situaciones problemáticas, en las que el sumar, restar, medir y realizar todo tipo de operación matemática es ya una tarea rutinaria.

En el segundo, es necesario destacar que una parte de nuestros problemas se pueden resolver a través de la matemática; ya que se puede partir de la situación planteada en un lenguaje verbal y expresarla en expresiones matemáticas para luego buscar su solución, o sea, matematizar la situación (modelar) mediante datos e incógnitas. Para nosotros eso es tan rutinario como para los compositores los signos musicales, esto alude al carácter universal de la matemática.

El tercer caso denota a la matemática como la ciencia que está integrada por un conjunto organizado de signos, teoremas, axiomas, proposiciones, conceptos que facilitan la solución de numerosos problemas que surgen en la actividad humana. Por tanto, a partir de estos tres posicionamientos se infiere que la matemática es la ciencia que tiene como objeto de estudio la resolución de problemas.

Según Murillo (2000) “conocer” o “saber” matemáticas, por parte de una persona, no puede reducirse a identificar las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos. Debe implicar ser capaz de usar el lenguaje y las situaciones típicas de la enseñanza de la matemática conceptual en la resolución de problemas. La atribución de un sentido pleno a los objetos matemáticos está estrechamente ligada a las situaciones de las que emergieron, por esto se postula la necesidad de “establecer puentes” (gabs) entre la matemática y la realidad natural y social que rodea a los jóvenes.

Ante esta problemática, sería oportuno definir el componente objetivo y precisar que este constituye el rector del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática; ya que establece el fin en cuanto a conocimientos, habilidades y valores que los estudiantes deben adquirir. Según Álvarez (1999, p. 53) “...son el modelo pedagógico del encargo social, son los propósitos y aspiraciones que durante el proceso docente- educativo se van conformando en el modo de pensar, sentir y actuar de los estudiantes”. En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática el objetivo fundamental lo constituye según Campistrous y Rizo (2002) “… lograr dotar a los estudiantes de un saber matemático…”.

Manifiestan además que si se indagara sobre *saber matemático* pueden existir diferentes respuestas, tales como:

 Es un conjunto de hechos (ejemplo, el Teorema de Pitágoras).

 Son situaciones típicas de la enseñanza de la matemática con herramientas, que sirven para realizar cálculos, cuya utilidad escapa de una gran parte de la población (ejemplo, la resolución de triángulos).

- Es un formalismo (ejemplo, el que aparece en la Teoría de Euclides).

- Es una forma de pensamiento.

Esta última opción es la que apenas se considera y sin embargo, es precisamente la tarea de la enseñanza de la Matemática: *formar un pensamiento matemático*. La referida categoría consiste en:

- Interpretar datos de la vida diaria y tomar decisiones en función de esa interpretación.

- Usar la matemática en forma práctica, desde simples sumas algorítmicas hasta análisis complejos (incluidos los estadísticos) y el empleo de la modelación.

- Poseer un pensamiento flexible y un repertorio de técnicas para enfrentarse a situaciones y problemas nuevos.

- Poseer un pensamiento crítico y analítico tanto al razonar como al considerar razonamientos de otros.

Se plantea además que para lograr esto se requiere:

- Buscar soluciones, no memorizar procedimientos.

Ejemplo: Ante el problema *Encuentra el número de dos cifras cuyo cubo es otro número de cinco cifras de manera tal que entre los dos números no se repitan cifras.*

Con la utilización de técnicas y estrategias tales como: casos límite, el tanteo inteligente, el cálculo (con el auxilio de la calculadora, teléfonos celulares, computadora) se puede llegar a la solución. Para el análisis del problema primero reflexionemos en las condiciones que de su propia lectura podemos extraer, y mediante la modelación referiremos que se trata de buscar dos números y que entre ambos tienen siete cifras. Al modelar esto sería:

$(\_\ \_)^3 = \_\ \_\ \_\ \_\ \_$

Luego, con auxilio de la calculadora, sería conveniente ver los casos límite, o sea, a partir de qué número de dos cifras distintas su cubo es un número de cinco cifras, esto ocurre con el 23 ya que: $(23)^3 = 12167$ y el mayor número de dos cifras cuyo cubo es un número de cinco cifras, este sería el 46, pues: $(46)^3 = 97336$.

La otra condición del problema está dada por no poder repetirse ninguna cifra entre el número y su cubo, habría que realizar un tanteo inteligente entre los números de dos cifras no repetidas que se encuentran en este intervalo (23 – 46) y sus cubos, pero no sería necesario realizar el cálculo de todos los cubos de los veinticuatro casos, porque si se analiza, en esta condición podemos despreciar algunos números en los que sucedería eso, como por ejemplo los terminados en 0, debido a que sus cubos terminarían en 0; en 1 cuyos cubos terminarían en 1; en 4 debido a que siempre terminarían en 4; en 5 que terminarían en 5; en 6 terminarían en 6; en 9 terminarían en 9. Además de despreciar el primero y el último por ya haber realizado su cálculo y constatar que se repiten cifras.

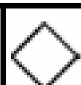
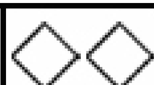
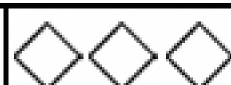
23 24 25 26 **27** **28** 29 30 31 **32** 34 35 36 **37** **38** 39 40 41 **42** **43** 45 46

Así, solo nos quedaría calcular el cubo de siete números: 27, 28, 32, 37, 38, 42 y 43. Al comprobar que es el 27 el número que satisface las condiciones del problema; ya que: $(27)^3 = 19683$.

- Explorar patrones, no memorizar fórmulas.

Ejemplo: En la siguiente situación:

El estudiante puede destacar y construir conexiones matemáticas, en una clase sobre medición para formular y resolver el problema a la vez que se exploran ideas geométricas, algebraicas y de medición. Se le ofrece al estudiante una hoja de trabajo con la situación siguiente para que mida, complete los espacios en blanco de la tabla y describa el patrón.

					
Número de cuadrados que se necesitan	1		3	..	n
Perímetro		8		..	

- Formular conjeturas, no solo hacer ejercicios.

En el ejercicio anterior se puede solicitar a los estudiantes que realicen conjeturas y fundamenten la validez de sus ideas.

Como se puede apreciar, ligado al “saber matemático” se encuentra el “poder matemático” y lo referido al intelecto y la educación ideológica, por lo que cuando se precise el componente rector del proceso: el objetivo, este debe contemplar todos estos elementos.

En este sentido, es significativo acotar los objetos con los que trabaja la matemática. Estos son: abstractos (cardinales de conjuntos, que se representan simbólicamente por números, variables, puntos, rectas, planos), con los cuales se conforman los conceptos primarios, se establecen relaciones, surgen proposiciones, procedimientos y se elabora toda una teoría. De ahí que se considere una ciencia abstracta. Sin embargo, ello no implica que debamos accionar de la misma manera, y ese precisamente ha sido uno de los errores que ha presentado la escuela, se ha pasado precipitadamente de la intuición a la deducción, del momento materializado a la abstracción.

Es por eso que existe un reclamo de quienes se ocupan de la educación matemática, en acudir a la historia de la ciencia, en las situaciones típicas de la enseñanza de la matematicología, en el cómo actuaron los hombres ante las problemáticas de la vida (la empírea) que dieron origen al conocimiento matemático y a su aplicación práctica tanto en la vida cotidiana como en otras ciencias como la biología, la química, la física, que de su integración surgen en la actualidad.

Al respecto Guzmán (2001, p. 5) plantea que:

> …la Educación Matemática debe ser concebida como un proceso de inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático, que es necesario cuidar y cultivar la intuición en general, la manipulación operativa del espacio y de los símbolos. (…) es preciso no abandonar la comprensión e inteligencia de lo que se hace, pero que no se debe (…) dejar pasar a un segundo plano los contenidos intuitivos de nuestra mente en su acercamiento a los objetos matemáticos.

En realidad sugiere que la inmersión en ella se realice a partir de la experiencia y la manipulación de los objetos de los que surge en cada fase de desarrollo mental, como a cada etapa histórica a cada nivel científico, le corresponde su propio rigor. Destaca de igual manera, que: "…el centro de la Educación Matemática está en los procesos del pensamiento matemático" (Guzmán, 2001, p. 5).

Es notorio destacar que ese aspecto ya se había valorado según los criterios de Campistrous y Rizo, quienes le otorgan gran importancia al estudio de las cuestiones que tienen que ver con los procesos mentales en la resolución de problemas y afirman que en la situación de transformación vertiginosa en la que nos encontramos es claro que los procesos verdaderamente eficaces de pensamiento, no se vuelven obsoletos con tanta rapidez, es lo más valioso que podemos proporcionar a nuestros jóvenes.

En este sentido, Guzmán (2001, p. 5) expresa: “En nuestro mundo científico e intelectual tan rápidamente mutante vale mucho más hacer acopio de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en ideas que forman un pasado lastre, que no son capaces de combinarse con otras para formar constelaciones dinámicas, capaces de abordar los problemas presentes”.

Esta posición se reafirma en los estándares elaborados por la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), edición de 1992 (p. 5) donde se plantea: “…la sociedad de hoy exige que la escuela asegure a todos los estudiantes la oportunidad de poseer una cultura matemática, ser capaces de ampliar su aprendizaje, tener igualdad de oportunidades para aprender y ser ciudadanos bien informados, capaces de entender las cuestiones propias de una sociedad tecnológica. A medida que cambia la sociedad, deben asimismo, cambiar las escuelas”.

En los estándares se proponen cinco fines generales para todos los estudiantes:

1. Que aprendan a valorar la matemática.

2. Que se sientan seguros de su capacidad para hacer matemáticas.

3. Que lleguen a resolver problemas matemáticos.

4. Que aprendan a comunicarse mediante las matemáticas.

5. Que aprendan a razonar matemáticamente.

Como se puede observar, estos fines tienen puntos de contacto con las exigencias de los programas de enseñanza de cómo deben ser tratados los contenidos matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje y con la pedagogía del optimismo con que tenemos que afrontar nuestra labor formativa, para humanizar cada vez más este proceso. Para alcanzar las referidas metas son de significativa importancia los métodos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática que, según Álvarez (1999, p. 28) "...es la organización interna del proceso docente-educativo, es la organización de los procesos de la actividad y comunicación que se desarrollan en el proceso docente-educativo para lograr el objetivo".

En correspondencia con lo planteado hasta aquí, podemos afirmar que los métodos a emplear en este proceso de enseñanza-aprendizaje deben contribuir al cumplimiento de las exigencias planteadas, así como al desarrollo del pensamiento del estudiante. Por tanto, los métodos participativos lógicos del pensamiento deben estar presentes, de forma tal que posibiliten el ejercicio pleno de las capacidades de los estudiantes.

En este sentido, es notorio el empleo de los métodos de análisis-síntesis, observación, comparación, generalización, inducción-deducción, formulación de conjeturas e hipótesis, reflexión, debate, las mesas redondas. Estos deben ser los fundamentales y combinarlos con los de elaboración conjunta e investigativos, de manera que exista espacio para el trabajo individual y colectivo.

El trabajo de carácter individual, en el que el estudiante interactúa de forma independiente con el ejercicio, es indispensable para el desarrollo de las habilidades matemáticas y para que transcurran con independencia sus procesos mentales. Asimismo, los ejercicios colectivos, en los que la realización de una tarea común con los otros sujetos tanto con vistas al establecimiento de ayudas, como para propiciar la expresión verbal del conocimiento, el enfrentamiento con otros sujetos donde tenga que explicar, fundamentar, argumentar, discutir y actuar, contribuyen con el proceso de socialización y con la potenciación no solo de la zona de desarrollo actual sino también de la zona de desarrollo próximo.

No obstante, sería oportuno plantear que los procedimientos heurísticos desempeñan un importante papel en la enseñanza de la Matemática, por lo que facilitamos algunos aspectos teóricos que pueden ayudar a la comprensión de dicha utilidad.

A la enseñanza-aprendizaje de la Matemática se le formulan exigencias que trascienden la elemental y no menos importante transmisión de los conocimientos y el desarrollo de habilidades intelectuales, así como también, respecto a su contribución al desarrollo de la capacidad para la generalización, formación, formulación y posterior aplicación de conceptos y sus definiciones. La obtención y definición de proposiciones matemáticas, así como su posterior demostración mediante la aplicación de reglas de inferencia lógica, constituye también una exigencia a cumplir como parte del referido proceso de enseñanza-aprendizaje.

Mediante su enseñanza, los estudiantes deben desarrollar habilidades tales que les permitan: fundamentar, describir y explicar, perfeccionar el vocabulario matemático, sentir la necesidad de expresarse con exactitud sobre los contenidos matemáticos, desarrollar la agilidad mental y lograr una mayor independencia cognoscitiva y por ende, una realización de las tareas docentes en forma cada vez más independiente.

Numerosos especialistas ven la necesidad de utilizar más y mejor aquellos métodos que favorecen la actividad de búsqueda del conocimiento por parte de los estudiantes, y tratan de establecer un cierto equilibrio en la utilización de los métodos deductivo y reductivo en la matemática; estos últimos estrechamente vinculados con los procedimientos heurísticos.

De lo anterior se infiere la responsabilidad del profesor de Matemática de pertrechar a sus estudiantes no solo de conocimientos y habilidades, sino también de los métodos y técnicas que propicien la actividad mental y práctica de estos, y que les permitan (previo entrenamiento) utilizar estrategias y procedimientos de solución, que les faciliten conducirse eficazmente ante cualquier situación típica de aprendizaje. De esta manera, podrán aplicar sus conocimientos a manera de problemas.

Zillmer (1981, p. 18) define una situación típica como: "... la clase (de abstracción) de todas aquellas situaciones reales en la enseñanza de una o de varias asignaturas que poseen semejanza con respecto a la estructura de los objetivos y a la estructura objetivo-materia; por eso, estas situaciones permiten un proceder semejante en la aplicación de una determinada estrategia de conducción y de los procedimientos metodológicos organizativos". Y considera las siguientes:

- Formación de conceptos y sus definiciones.
- Tratamiento de teoremas y sus demostraciones.
- Resolución de ejercicios y problemas.
- Elaboración de procedimientos de solución algorítmicos.
- Resolución de ejercicios geométricos de construcción.

Posteriormente, González (1999), establece la siguiente clasificación:

- Formación de conceptos y sus definiciones.
- Tratamiento de ejercicios y problemas.

- Tratamiento de ejercicios de construcciones geométricas.

- Demostraciones matemáticas, que incluye:

- Tratamiento de teoremas y sus demostraciones.

- Tratamiento de ejercicios de demostración.

Es significativo acotar el valor gnoseológico de las demostraciones matemáticas, por razones tales como:

- La frecuencia con que aparecen en los textos y programas de la asignatura Matemática.

- Los teoremas que se tratan en la escuela por la vía de la deducción y/o de la demostración. Los ejercicios de demostración no se corresponden con ninguno de esos grupos.

- El trabajo con las demostraciones de teoremas, en la escuela, es mínimo, por lo que si se consideran los ejercicios de demostración dentro de esta situación típica, su tratamiento quedaría discriminado.

- Los ejercicios de demostración no están incluidos en la situación típica “tratamiento de problemas”. Es obvio que esto ocurra así, porque en esta situación típica tradicionalmente se tratan los ejercicios de aplicación y los ejercicios con texto.

De esta forma, los ejercicios de demostración quedan en el mismo plano que las situaciones típicas que tradicionalmente se han tratado en la disciplina Metodología de la Enseñanza de la Matemática.

1.2 Papel de la instrucción heurística en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática

En el transcurso de las últimas décadas del siglo XX y principios del XXI se han puesto en práctica nuevas y variadas concepciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Estas son el resultado de investigaciones de especialistas nacionales y extranjeros en torno al tratamiento de determinadas situaciones típicas de esta enseñanza, fundamentalmente sobre el trabajo con problemas. Algunos de esos especialistas abogan por utilizar los recursos heurísticos.

Muller (1987) destaca en su obra la importancia que tiene el trabajo heurístico para la resolución independiente por los estudiantes, de ejercicios de diferentes tipos y que no tienen carácter algorítmico. Señala la necesidad de que estos aprendan a aplicar los elementos heurísticos a la resolución de ejercicios y problemas.

Por tanto, se sugiere a los docentes que no solo utilicen los procedimientos heurísticos en la solución de ejercicios, sino que los declaren explícitamente, de manera que los estudiantes sepan cuándo utilizan un principio u otro, una regla u otra. Ello favorece ciclópeamente el desarrollo del pensamiento, ya que constituyen recursos a los que pueden recurrir cuando les sea necesario.

De esta forma, queda explícita la importancia y el papel que tiene la utilización de recursos heurísticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, sobre la base del tratamiento de las situaciones típicas de la enseñanza de esta materia. Sin embargo, sería insuficiente si solo nos concentráramos en su importancia. De ahí la necesidad de aludir la instrucción heurística de la Matemática.

Con relación a ella se han encontrado referencias en la literatura nacional y extranjera. Para una mejor comprensión del término "instrucción heurística" hay que partir de lo que se entiende por instrucción, lo cual se define como: "…proceso y resultado de la asimilación de los conocimientos, hábitos y habilidades. Se caracteriza por el nivel de desarrollo del intelecto y de las capacidades creadoras. Presupone determinado nivel de preparación en una u otra esfera de la actividad social" (Albarrán, 1998, p.43).

Ballester y otros (1990) definen la instrucción heurística de la Matemática como: "...la enseñanza consciente y planificada de reglas generales y especiales de la heurística para la solución de problemas".

En este trabajo, el autor, a partir de la clasificación dada por Torres (1993) con relación a los procedimientos heurísticos esenciales y elementales para el tratamiento de cada situación típica de la enseñanza de la Matemática, establece lo siguiente:

SITUACIÓN TÍPICA	PROCEDIMIENTOS HEURÍSTICOS ESENCIALES	PROCEDIMIENTOS HEURÍSTICOS ELEMENTALES
Formación de conceptos y sus definiciones. Demostraciones matemáticas.	PH: Distinguir características comunes y no comunes. PH: Generalización.	PH: Analogía. PH: Complexión. PH: Búsqueda de relaciones y dependencias.
Obtención de teoremas (reductivamente) Obtención de las ideas de la demostración del teorema (suposición)	PH: Medir y comparar situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática. PH: Generalización. PH: Analogía.	PH: Movilidad. PH: Reducción a problemas ya resueltos.
Resolución de ejercicios de demostración.	RH: Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente. RH: Sustituir los conceptos por sus definiciones. EH: Trabajo hacia adelante. EH: Trabajo hacia atrás.	RH: Separa premisas y tesis. RH: Elaborar una figura de análisis. RH: Transformar la tesis en una expresión equivalente.

SITUACIÓN TÍPICA	PROCEDIMIENTOS HEURÍSTICOS ESENCIALES	PROCEDIMIENTOS HEURÍSTICOS ELEMENTALES
Resolución de ejercicios con textos y problemas.	RH: Determinar si el problema se puede resolver a través de una fórmula conocida o es necesario elaborar una ecuación. RH: Representar las relaciones contenidas en el texto del problema.	RH: Precisar lo dado y lo buscado. RH: Elaborar un esbozo o una figura de análisis. RH: Representar las magnitudes buscadas con variables.
Resolución de ejercicios geométricos de construcción.	EH: Método de los lugares geométricos. EH: Método de las transformaciones geométricas.	RH: Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente. RH: Sustituir los conceptos por sus definiciones. PH: Analogía.
Elaboración de sucesiones de indicaciones con carácter algorítmico.	RH: Analizar qué acciones de identificación o transformación es necesario realizar para alcanzar el objetivo deseado.	RH: Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente. RH: Sustituir conceptos por sus definiciones. PH: Analogía.

En el acápite *El papel de los ejercicios en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática* del capítulo II se profundizará en los procedimientos heurísticos. Por cuanto, desde la lógica del presente texto, que se fundamenta en el enfoque de espiral, se retoman estos procedimientos desde la concepción de ejercicios.

1.3 Líneas directrices en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática

Otro de los aspectos recomendables a conocer por parte de los docentes que imparten Matemática lo constituye, las denominadas *Líneas directrices*. Estas son agrupamientos de la materia de enseñanza por aspectos principales referidos a la transmisión de conocimientos, el desarrollo de capacidades y la formación de convicciones a partir de los objetivos de la formación general y tienen una especial significación ya que le permiten al profesor reconocer los principios más importantes que determinan el currículo escolar de la Matemática. Ello evita que se pierda entre la numerosidad de conceptos, procedimientos y complejos de contenidos que se establecen en los programas, y esta es la razón que dio origen al diseño de estas líneas de trabajo.

Fundamentan su existencia en la información que le proporcionan a los docentes sobre:

- La forma en que trabajan los conceptos.

- Las condiciones previas de que se dispone para el tratamiento de los nuevos conocimientos y los que deben ser creados para el aprendizaje de conocimientos posteriores.

- La contribución que debe aportarse con el tratamiento de cada unidad a objetivos generales de la asignatura.

- La forma en que deben trabajarse conceptos, procedimientos y proposiciones importantes.

- Las potencialidades para la motivación que ofrece el tratamiento del contenido en unidades precedentes.

Desde el establecimiento, de manera formal, de las líneas directrices en los programas de Matemática escolar, a partir de la década del 70 hasta la fecha han sufrido variaciones en su denominación y en cuantía. Es por ello que solo haremos referencia a las que recientemente exponen autores de experiencia en la didáctica de las matemáticas, como por ejemplo Ballester y otros (2002), quien resume que en los programas actuales se reconocen las siguientes:

- Dominios numéricos.

- Trabajo con variables, ecuaciones y situaciones típicas de la enseñanza de las matemáticas.

- Geometría y trabajo con magnitudes.

- Planteamiento, formulación y resolución de problemas.

- Correspondencia y funciones.

- Técnicas de la actividad mental y práctica en el aprendizaje de la Matemática.

- Educación ciudadana, patriótica e internacionalista.

A continuación, haremos referencia a dos de estas líneas directrices: Planteamiento, formulación y resolución de problemas, y Geometría y trabajo con magnitudes.

1.3.1 Línea directriz: Planteamiento, formulación y resolución de problemas

García (2000) refiere algunas definiciones dadas por otros autores, así por ejemplo:

- Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata (Polya, 1962)

- Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma (Krulik y Rudnik, 1980).

De ambas definiciones, se infiere que un problema debe satisfacer los tres requisitos siguientes:

1. Aceptación: El individuo o grupo, debe aceptar el problema y existir un compromiso formal, que puede ser debido a motivaciones internas. Esto es lo que nosotros denominamos el estar motivado intrínsecamente para resolver el problema.

2. Bloqueo: Los intentos iniciales no dan frutos, las técnicas habituales de abordar el problema no funcionan. Aquí referimos la existencia de contradicciones:

- Entre los conocimientos adquiridos por los estudiantes y las nuevos por adquirir.

- Entre el nivel del contenido de la enseñanza y las posibilidades reales de los estudiantes para su asimilación.

- Entre la impartición frontal de la materia de enseñanza por parte del maestro y la adquisición, perfectamente individual, por los estudiantes.

3. Exploración: El compromiso personal o del grupo fuerzan la exploración de nuevos métodos para atacar el problema.

Significaría la búsqueda de nuevos conocimientos, procedimientos y técnicas para abordar el problema y llegar a una solución.

Es significativo acotar que en la comunidad científica del área de matemática ha existido cierta polémica sobre la diferencia que existe entre un ejercicio o un auténtico problema, al manifestarse que lo que para algunos es un problema, por falta de conocimientos específicos sobre el dominio de métodos o algoritmos de solución, para los que sí los tienen es un ejercicio. Se reconoce así que esta cuestión, aunque ha sido planteada en varias ocasiones, no parece un buen camino para profundizar sobre la resolución de problemas.

Por otra parte, García al referirse a Borasi (1986), hace alusión a que en uno de los primeros intentos en clarificar la noción de problema originada por su interés en mejorar la enseñanza de la resolución de problemas, utiliza los siguientes elementos estructurales para una tipología de problemas:

- El contexto del problema, la situación en la cual se enmarca el problema mismo.

- La formulación del problema, definición explícita de la tarea a realizar.

- El conjunto de soluciones que pueden considerarse como aceptables para el problema.

- El método de aproximación que podría usarse para alcanzar la solución.

Tales elementos estructurales pueden dar origen a la siguiente taxonomía:

TIPO	CONTEXTO	FORMULACIÓN	SOLUCIONES	MÉTODO
Ejercicio	Inexistente	Única y explícita	Única y exacta	Combinación de algoritmos conocidos
Problema con texto	Explícito en el texto	Única y explícita	Única y exacta	Combinación de algoritmos conocidos
Puzzle	Explícito en el texto	Única y explícita	Única y exacta	Elaboración de un nuevo algoritmo Acto de ingenio
Prueba de una conjetura	En el texto y solo de forma parcial	Única y explícita	Por lo general única, pero no necesariamente	Exploración del contexto, reformulación, elaboración de nuevos algoritmos
Problemas de la vida real	Solo de forma parcial en el texto	Parcialmente dada Algunas alternativas posibles	Muchas posibles, de forma aproximada	Exploración del contexto, reformulación, creación de un modelo
Situación problemática	Solo parcial en el texto	Implícita, se sugieren varias, problemática	Varias. Puede darse una explícita	Exploración del contexto, reformulación, plantear el problema
Situación	Solo parcial en el texto	Inexistente, ni siquiera implícita	Creación del problema	Formulación del problema

Ejemplos

 Problema con texto: María ha merendado una hamburguesa y una gaseosa y para pagar entrega al camarero un billete de 5.00 pesos. La hamburguesa cuesta 1.60 pesos y el refresco gaseado 1.00 pesos. ¿Cuánto le devolverá?

 Ejercicio: Calcular 4: 2+6. 3.

 Puzzle: A partir de seis cerillas (fósforos) construir cuatro triángulos equiláteros.

□ Prueba de una conjetura: Demostrar que si a, b y c son enteros impares, las raíces de la ecuación ax2+bx +c no son racionales.

□ Problemas de la vida real: Queremos enlozar una habitación cuya forma es irregular. Deseamos estimar la cantidad de metros cuadrados de lozas que debemos adquirir.

□ Situación problemática: Un teorema fundamental establece que la descomposición de un número natural en producto de números primos es única. ¿Qué ocurre si cambiamos en dicho enunciado la palabra producto por la palabra suma?

□ Situación: Considere las siguientes parejas de números primos gemelos (3,5) (5,7) (11,13), (17,19) (29,31) (41,43) (71,73).

Entre otras formas de conceptualizar qué es un problema Guzmán (2001, p. 56) plantea que: "…se está ante un verdadero problema cuando se encuentra en una situación desde la que quiere llegar a otra, una veces bien conocida otras un tanto confusamente perfilada y no conoce el camino que lo puede llevar de una a otra".

Otra definición de problema está planteada por Palacios (1993, p. 43): "El problema puede ser definido como cualquier situación, que produce por un lado un cierto grado de incertidumbre y, por otro lado, una conducta tendente a la búsqueda de su solución".

Así Campistrous y Rizo (1996) plantean que en la literatura existen diversas acepciones del concepto problema, atendiendo cada una a diferentes puntos de vista, pero ellos asumen como problema *a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo*. Insisten en que la vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida; debido a que cuando es conocida deja de ser un problema.

De una u otra manera, las diferentes acepciones que aquí se han manejado no dejan dudas de que el problema es un recurso muy importante en la didáctica y que se extiende a cualquier ciencia, por cuanto la selección de los problemas requiere además de la naturaleza de la tarea, el nivel de necesidades de los estudiantes, en tanto lo que para unos es un problema para otros no lo es. A esto se une el carácter motivacional, ya que la persona que se enfrente a un problema debe tener el deseo de querer hacer las transformaciones que permitan resolverlo, lo que generará voluntad y perseverancia (estados dinámicos/unidades subjetivas de desarrollo), de lo contrario deja de ser un problema.

Es por ello que Campistrous y Rizo (1996) plantean que en la resolución de problemas hay, al menos, dos condiciones que son necesarias:

- la vía tiene que ser desconocida;
- el individuo quiere resolver el problema.

La resolución de problemas, como propuesta didáctica, fue acuñada en la década de los 80 por el *National Council of Teachers of Mathematics*. El referido staff consignaba que en la enseñanza de las matemáticas escolares se debe poner el enfoque en la resolución de problemas; lo que implica:

- Enseñar para resolver problemas:

- Proponer a los estudiantes más problemas.

- Emplear aplicaciones de los problemas a la vida diaria y a las ciencias.

- No proponer solo ejercicios sino también problemas genuinos que promuevan la búsqueda, la investigación por los estudiantes. Ejemplos de esta última interpretación se pueden hallar en Mason y otros (1988), Guzmán (1991), Callejo (1994) y Bagazgoitia y otros (1997).

1. Enseñar sobre la resolución de problemas:

- Enseñanza de la heurística. El objetivo es que los estudiantes lleguen a aprender y a utilizar estrategias para la resolución de problemas. Dentro de esta tendencia hay ejemplos en los mismos trabajos citados anteriormente. Sin embargo, parece ser que las destrezas heurísticas son las más apropiadas para tal fin.

2. Enseñar vías de resolución de problemas:

- Enseñar la matemática a través de problemas.

En el seminario celebrado en La Laguna en 1982 e impartido por el profesor Gaulin, cuando preguntó por objetivos de la resolución de problemas, los profesores asistentes enumeraron los siguientes:

- desarrollo de la capacidad de razonamiento;
- aplicación de la teoría previamente expuesta;
- resolución de cuestiones que la vida diaria plantea.

Según Fernández (1982) "…la primera propuesta, aunque durante un tiempo fue un argumento aceptado sobre las virtudes de la educación matemática, con el paso del tiempo se ha convertido en un mito. Las dos últimas caen dentro de la primera interpretación".

En el caso de Campistrous y Rizo, al referirse al enfoque de enseñar a resolver problemas, facilitan ideas para trabajar con diversas estrategias y técnicas de manera que el estudiante enriquezca sus capacidades para enfrentar diferentes problemas. De ahí su libro *Aprender a resolver problemas aritméticos.*

No obstante, es significativo acotar que las tres formas pueden ser aceptadas en nuestro proceder de manera integrada, en tanto, puede realizarse el tratamiento del nuevo contenido a partir del planteamiento de una situación problémica de la vida cotidiana que implique la necesidad de buscar nuevos conceptos, procedimientos y técnicas. Una vez adquiridos, aplicamos los procedimientos heurísticos, en los que se demuestre la manera de abordar al problema y luego realizamos los planteamientos de diversas situaciones nuevas que posibiliten aplicar estas estrategias en las que apliquen los conocimientos adquiridos. De esta forma, se logra la participación activa, la reflexión individual y colectiva, tanto oral como escrita.

En este sentido, García (2000) se cuestiona: *¿Existe algún patrón que caracterice la práctica educativa?* Al respecto cita a dos autores Stigler y Hiebert (1997), que aluden a que:

- Lo más característico es el énfasis en enseñar procedimientos, en especial procedimientos de cálculo.

- Se presta poca atención a ayudar a los estudiantes a desarrollar ideas conceptuales, o incluso a conectar los procedimientos que aprenden con los conceptos que muestran por qué aquellos funcionan.

Según Dossey y otros (1988, p.17) "…la instrucción matemática puede caracterizarse con ligeras variaciones, como la actividad que consiste en: la explicación del contenido por el profesor, trabajo individual de los estudiantes sobre las tareas propuestas y corrección de las mismas, dirigidas al gran grupo, en la pizarra".

Es esta la razón, que en este sentido, García (2000, p.21) concluye con la idea de que: "La mayoría de las veces, debido a la dificultad del contenido o al tiempo disponible, la explicación se dirige hacia un nivel medio de la clase, cuando no al más alto, y hacia el aprendizaje directo de determinados algoritmos o definiciones".

El resultado de tal práctica es, por un lado, propicio para los aprendizajes rutinarios, carentes de significado, y la construcción de esquemas conceptuales débiles por los estudiantes, que se manifiestan en una pobre actuación, sobre contenidos supuestamente aprendidos, después de un cierto tiempo. Por otro lado, los maestros y los profesores enseñan de la misma forma en que fueron enseñados en la escuela.

De ahí se infiere el porqué no se enseñan fundamentalmente las matemáticas a través de la resolución de problemas. Su importancia es tan significativa que Fraga y Acosta (2001, p.57) expresaron que: "El deseo de mejorar el aprendizaje de la Matemática y de las ciencias en general ha hecho que surgieran, como alternativas a la enseñanza tradicional, diversos modelos didácticos de enseñanza; entre ellos se puede citar a la Enseñanza de la Matemática por Problemas".

Los referidos autores reconocen la tradición de reconocer el enseñar y el aprender a resolver problemas como uno de los ejes centrales en la enseñanza de la Matemática. Luego ofrecen una clasificación de los problemas y lo hace a partir de diversos criterios, como se muestra a continuación:

- Según el *campo del conocimiento implicado*: Está dado por la diferencia entre los problemas que se plantean en la enseñanza de la ciencia y aquellos que tienen lugar en la vida cotidiana. En el primer caso, lo importante no es la obtención de la solución sino más bien el proceso para llegar a ellas. En cambio, ocurre lo contrario en los problemas cotidianos.

- Según el *tipo de tarea*: Se pueden dividir en problemas cualitativos y problemas cuantitativos.

Se entiende por problemas cualitativos aquellos que en su resolución no se precisa recurrir a determinaciones numéricas, debiendo resolverse de forma verbal/escrita, normalmente se refieren a la interpretación científica de fenómenos reales. Por el contrario, los problemas cuantitativos, o simplemente "problemas", exigen cálculos numéricos efectuados a partir de las ecuaciones correspondientes y de los datos disponibles en el enunciado.

- Según *la naturaleza del enunciado y características del proceso de solución*: Se pueden dividir en problemas cerrados y problemas abiertos. Los primeros son aquellas tareas que contienen toda la información precisa y son resolubles mediante el empleo de un cierto algoritmo por parte del solucionador. Los segundos, por el contrario, implican la existencia de una o varias etapas en su resolución que deben ser aportadas por el solucionador mediante la acción de pensamiento productivo. Bajo este criterio, los problemas cualitativos pueden ser considerados en la mayoría de los casos como problemas abiertos y los cuantitativos como cerrados (Palacios, 1993).

El referido autor manifiesta la existencia de otros elementos a tener en cuenta, como son las variables a considerar en la resolución de problemas, y expone:

- *La naturaleza del problema*: Las variables que se contemplan fundamentalmente se refieren a los aspectos formales del problema, tales como: precisión, estructura y lenguaje del enunciado, complejidad y tipo de tarea requerida en la resolución, solución abierta o cerrada, conocida o desconocida.

- *El contexto de la resolución del problema*: En este caso habría que reparar en aquellas variables que intervienen en el proceso de resolución, sin tener en cuenta al propio sujeto que lo resuelve. Así cabría hablar de la manipulación o no de objetos reales, la consulta o no de fuentes de información, la verbalización o no de la resolución, si se suministra o no el algoritmo puesto en juego, tiempo de resolución.

- *El solucionador del problema*: Se incluyen aquí las características del solucionador, tales como: conocimiento teórico, habilidades cognitivas, creatividad, actitud, ansiedad, edad, sexo. Igualmente se podría hablar del solucionador individual o grupal.

El autor realiza una síntesis de las pautas metodológicas para la resolución de problemas y comenta que estas son dadas al estilo de las ofrecidas por Polya (1965) en su libro *¿Cómo plantear y resolver problemas?*, en el que reconoce que tienen su basamento especial en la *Heurística* y los resume como sigue:

- Comprender el problema:

Implica en primer lugar, familiarizarse con el problema. El estudiante debe comprender y desear resolverlo. El mismo debe escogerse adecuadamente y se le debe dedicar el tiempo necesario para exponerlo. En el proceso de decodificación se les pedirá a los estudiantes que digan qué codificó el emisor en el enunciado y que separen la incógnita de los datos. Por tanto, debe considerar las principales partes del problema. Si hay alguna figura relacionada con el problema, se debe dibujar y destacar en ella la incógnita y los datos, dar nombre a dichos elementos e introducir una notación adecuada.

- Concebir un plan:

Determinar la relación entre los datos y la incógnita. De no encontrarse relación inmediata puede considerarse un problema auxiliar. Obtener finalmente un plan de solución. Es notorio destacar que, por un lado, se tiene un plan cuando se sabe, al menos *grosso modo*, qué cálculos, razonamientos o construcciones hay que efectuar para determinar la incógnita.

Por otro lado, se debe cambiar, transformar o modificar el problema. Determinar si puede enunciarse el problema de forma diferente. El problema puede ser variado mediante medios específicos, tales como:

la generalización, la particularización, el empleo de analogías y el descartar una parte de las condiciones. Si no se puede resolver el problema propuesto, se debe tratar de resolver primero algún problema relacionado con él.

 Ejecutar el plan y comprobar cada paso:

Para ejecutar el plan hace falta una serie de circunstancias: conocimientos ya adquiridos, concentración, examinar los detalles unos tras otros para evitar cualquier error. El profesor debe insistir en que se verifique cada paso. Lo esencial es que el estudiante este seguro de la exactitud de cada paso. El profesor debe subrayar la diferencia entre “ver” y “demostrar”.

 Examinar la solución obtenida:

Visión retrospectiva, verificar el resultado, ver si se puede obtener el resultado de forma diferente, y si se puede emplear el resultado o el método en otro problema. Aunque el estudiante haya llevado a cabo su plan y obtenido la solución es recomendable verificarla. Al reconsiderar la solución se obtiene la oportunidad de investigar las relaciones para no dar la impresión de que los problemas matemáticos no tienen relación entre sí, ni con el mundo físico. Por tanto, debe verse en qué caso sí es posible utilizar de nuevo el mismo proceso de razonamiento o aplicar el resultado obtenido.

En este sentido, es notorio destacar la importancia que revelan los principios epistemológicos de la resolución de problemas que según Schoenfeld (1987) deben ser reconocidos por los estudiantes. Los mismos se muestran a continuación:

- Encontrar la solución de un problema matemático no es el final de una empresa matemática, sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones y generalizaciones del problema.

- Aprender matemáticas es un proceso activo que requiere discusiones de conjeturas y pruebas. Este proceso puede guiar a los estudiantes al desarrollo de nuevas ideas matemáticas; es necesario considerar actividades de aprendizaje que sean consistentes con los principios epistemológicos.

- La resolución de problemas es una aptitud cognitiva compleja que caracteriza una de las actividades humanas inteligentes. La teoría sistemática sobre los mecanismos de la resolución de problemas es un avance relativamente reciente de la Psicología Cognitiva.

El autor referido señala las siguientes ventajas y limitaciones de la resolución de problemas:

- Ventajas:

- Resulta un componente importante en el estudio del conocimiento matemático.

- Posibilita desarrollar conceptos y teorías matemáticas, a partir de la propia resolución del problema.

- Contribuye a la solidez de los conocimientos.

- Contribuye al desarrollo del pensamiento lógico y creador de los estudiantes.

- Limitaciones:

- La preparación y motivación de los estudiantes para ese tipo, tan exigente, de actividad.

- El tiempo disponible para trabajar con el programa.

Se vuelve a insistir en que el eje central de la resolución de problemas es la heurística y la necesidad de tener en cuenta los pasos metodológicos dados anteriormente. Se recomienda que sean utilizados por los estudiantes de forma sistemática. Sin embargo, reconoce la dificultad en la enseñanza de la heurística, el problema de saber cuándo aplicar un procedimiento determinado, dada la generalidad de las heurísticas que no aportan nada, en ciertos campos, a quien no tiene suficientes conocimientos.

El citado autor presenta además, algunos problemas que pudieran dar la idea del tratamiento de la matemática a través de problemas que también se los ofrecemos para vuestra valoración.

<u>Ejemplos:</u>

1. Juan tiene siete naranjas. Le da tres a María. ¿Cuántas naranjas le quedan a Juan?

Ejercicios de este tipo colocan las matemáticas en el contexto del mundo real, y la resolución de tareas que toman como modelo tales situaciones tiene, por supuesto, más relevancia que el resolver ejercicios numéricos como 7 - 3 =4.

2. ¿Cuál es el valor de la suma de los coeficientes de $(x+1)^{2003}$?

El elemento del problema que se debe tener claro es el binomio a una potencia determinada. La clave para resolver este problema es encontrar patrones inductivos; o sea, considerar ejemplos particulares sustituyendo consecutivamente enteros positivos en el tipo de expresión que contiene el problema y observar su comportamiento.

Al desarrollar ese binomio para los primeros casos se obtiene:

N	EXPRESIÓN	COEFICIENTES	SUMA DE COEFICIENTES	
0	$(x + 1)^0 = 1$	1	1	$_{0}2$
1	$(x + 1)^1 = x + 1$	1 1	2	$_{1}2$
2	$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$	1 2 1	4	$_{2}2$
3	$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$	1 3 3 1	8	$_{3}2$
4	$(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$	1 4 6 4 1	16	$_{4}2$
	.....	.....	.....	.....
n	$(x + 1)^n$	1 1	.....	$_{n}2$

En este sentido, García (2000) hace una interesante reflexión ante la interrogante: ¿Por qué es tan difícil entonces, para la mayoría de los seres humanos, la resolución de problemas matemáticos? En su reflexión se refiere a las etapas de ejecución y control, y enfatiza en las fases de motivación y orientación sin las cuales sería, como hemos valorado, imposible trabajar en las siguientes. El citado autor plantea: “Los trabajos de Schoenfeld (1985), son una búsqueda de explicaciones para la conducta de los solucionadores reales de problemas”. Este autor propone un marco con cuatro componentes que sirva para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas, como se muestra a continuación:

- Recursos cognitivos: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor.

- Heurísticas: reglas para progresar en situaciones dificultosas.

- Control: uso eficiente de los recursos disponibles.

- Sistema de creencias: perspectiva con respecto a la naturaleza de la Matemática y cómo trabajar en ella.

Cada uno de los componentes explica las carencias, y por tanto, el poco éxito en la resolución de problemas de los solucionadores reales. Así, cuando a pesar de conocer las heurísticas no se sabe cuál utilizar o cómo utilizarla se señala la ausencia de un buen control o gestor de los recursos disponibles.

Sin embargo, las heurísticas y un buen control no son suficientes, por cuanto puede que el solucionador no conozca un hecho, algoritmo o procedimiento específico del dominio matemático del problema en cuestión. En este caso, se señala la carencia de recursos cognitivos como explicación al intento fallido en la resolución.

Por otro lado, puede que todo lo anterior esté presente en la mente del solucionador. Sin embargo, sus creencias de lo que es resolver problemas en matemáticas o de la propia concepción sobre la matemática hagan que no progrese en la resolución. La explicación, para este fallo, la contempla Schoenfeld en el cuarto elemento del marco teórico, las creencias. Un elemento significativo para resolver estas contradicciones lo constituyen los procedimientos heurísticos. Es notorio destacar que la mayor parte de las veces se carece de ellos.

Se dispone de conocimientos específicos del tema o dominio matemático del problema, incluso de un buen control pero falla el conocimiento de reglas para superar las dificultades en la tarea de resolución. Los procedimientos heurísticos son las operaciones mentales típicamente útiles en la resolución de problemas, *son como reglas o modos de comportamiento* que favorecen el éxito en el proceso de resolución, sugerencias generales que ayudan al individuo a comprender mejor el problema y a progresar hacia su solución.

Existe una amplia, posiblemente incompleta, lista de procedimientos heurísticos. Entre las más importantes cabría citar:

- Buscar un problema relacionado.
- Resolver un problema similar más sencillo.
- Dividir el problema en partes.
- Considerar un caso particular.
- Hacer una tabla.
- Buscar regularidades.
- Empezar el problema desde atrás.
- Variar las condiciones del problema.

Sin embargo, como señala Puig (1996), en la lista anterior aparecen demasiadas "cosas juntas", que son, por otro lado, diferentes si las sometemos a un detenido análisis:

1. Buscar un problema relacionado es una sugerencia heurística: señala una dirección de trabajo, se recurre a la memoria del solucionador, y no a un procedimiento concreto para buscar tal problema.

2. Considerar un caso sí es un procedimiento en concreto que permite, a partir del problema dado, formular un problema relacionado con él. Puig (1996) denomina a este tipo de procedimientos, independientes del contenido y que permiten transformar el problema dado en otro, con el nombre de herramientas heurísticas (tal observación parte de una nota marginal de Polya, 1962).

3. Hacer una tabla se podría considerar como una destreza al no poseer el carácter de transformar el problema ni al recurso de la memoria como en el caso de las sugerencias heurísticas.

La característica más importante del proceso de resolución de un problema es que, por lo general, no es un proceso paso a paso sino más bien un proceso titubeante. En el proceso de resolución, Schoenfeld señala que tan importante como las heurísticas/procedimientos heurísticos es el control de tal proceso, a través de decisiones ejecutivas. Tales decisiones son acerca de qué hacer en un problema.

La característica más importante que define a las decisiones ejecutivas y a las acciones de control, es que tienen consecuencias globales para la evolución del proceso de resolución de un problema. Las decisiones ejecutivas determinan la eficiencia de los conocimientos y recursos de todo tipo puestos en servicio para esto. Ellas son:

- Hacer un plan.

- Seleccionar objetivos centrales y sub-objetivos.

- Buscar los recursos conceptuales y heurísticos que parecen adecuados para el problema.

- Evaluar el proceso de resolución a medida que evoluciona.

- Revisar o abandonar planes cuando su evaluación indica que hay que hacerlo.

Las anteriores decisiones ejecutivas constituyen una aplicación burda de ese término de las devenidas de Inteligencia Artificial. Además, son equivalentes a las decisiones de gestión en el campo de los negocios, o decisiones de táctica y estrategia en el campo militar.

El término metacognición se ha acuñado en la literatura psicológica en la discusión de fenómenos relacionados con el que aquí tratamos. Son por tanto, decisiones acerca de qué caminos tomar, pero también acerca de qué caminos no tomar. De ahí que, cuanto más precisas sean las respuestas a las preguntas: qué sé hacer con lo que conozco, cómo lo hago, qué metas tengo, por qué y para qué lo hago, y cómo lo usaré después; mejor será el control global que se tenga sobre el problema y sobre las decisiones que conducen a su solución.

La ausencia de decisiones ejecutivas y de control suele tener efectos desastrosos en el proceso de resolución de un problema. La mayor parte de las veces en que se fracasa en la resolución de un problema es debido a que la persona que afronta el problema, no dispone de un plan de solución. Sin embargo, hay otras actitudes que imposibilitan la toma de buenas decisiones durante la fase de resolución. Entre ellas cabe destacar:

- Inflexibilidad para considerar alternativas: Cuando una y otra vez fallan los procedimientos empleados no hay más salida que cambiar de perspectiva para salir del bloqueo.

 Rigidez en la ejecución de procedimientos: Más de una vez intentaremos encajar un procedimiento conocido en una situación en la que no es aplicable. Nuestra obstinación es debida al simple hecho de que nos parece apropiado a primera vista, o porque la situación, aunque distinta, se parece a aquella en que el procedimiento fue eficaz.

 Incapacidad de anticipar las consecuencias de una acción: Al respecto cabe hacerse siempre la siguiente pregunta (antes de ejecutar una acción pensada, cuando haya ejecutado lo que pienso): ¿qué consecuencias tendrá para la resolución del problema?

 El efecto “túnel”: Se produce cuando la ejecución de una tarea es tan absorbente que no hay energías disponibles para la evaluación de lo que se realiza. Suele darse más fácilmente cuanto más embebido se está en la ejecución de una acción.

Guzmán, sustentado en las ideas de Polya y otros (1988) y de Schoenfeld elaboró un modelo para la ocupación con problemas, donde se incluyen tanto las decisiones ejecutivas y de control como las heurísticas. La finalidad del referido modelo es que la persona examine y remodele sus propios métodos de pensamiento de forma sistemática a fin de eliminar obstáculos y de llegar a establecer hábitos mentales eficaces, en otras palabras, lo que Polya denominó como pensamiento productivo.

Modelo para la ocupación con problema, según Guzmán (1991, p. 80):

□ Familiarízate con el problema:

□ Trata de entender a fondo la situación.

□ Trata de entender con paz, con tranquilidad, a tu ritmo.

□ Juega con la situación, enmárcala, trata de determinar el aire del problema, piérdele el miedo.

□ Busca estrategias:

□ Empieza por lo fácil.

□ Experimenta.

□ Hazte un esquema, una figura, un diagrama.

□ Escoge un lenguaje adecuado, una notación apropiada.

□ Busca un problema semejante.

□ Induce.

□ Supón el problema resuelto.

□ Supón que no.

□ Lleva adelante tu estrategia:

- Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se te han ocurrido en la fase anterior.

- Actúa con flexibilidad. No te aferres a una idea. Si las cosas se complican demasiado, busca otra vía.

- ¿Salió? ¿Seguro? Mira a fondo tu solución.

- Revisa el proceso y saca consecuencias de él:

- Examina a fondo el camino que has seguido. ¿Cómo has llegado a la solución? O bien, ¿por qué no llegaste?

- Trata de entender no solo que la estrategia funciona, sino por qué funciona.

- Mira si encuentras un camino más simple.

- Mira hasta dónde llega el método.

- Reflexiona sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.

Es notorio acotar además, que tan importante es resolver problemas como *acostumbrarse a plantear problemas* a partir de situaciones que requieren una formulación precisa de los mismos. De ahí la necesidad de los siguientes procedimientos, los cuales realizan previamente una fundamentación del porqué incluir este aspecto en la línea directriz, para luego proponer el tratamiento que debe darse a este aspecto:

1. Formulación de problemas por los estudiantes.

En algunos programas de matemática se plantea como una exigencia la preparación de los estudiantes para la formulación de ejercicios con texto y problemas. Los problemas deben tener una formulación sencilla, en oraciones cortas y la pregunta debe estar expresada con claridad. La formulación de problemas la hacen primero a partir de ilustraciones y luego de igualdades, teniendo en cuenta modelos o situaciones dadas.

En otros, aparece como habilidad a alcanzar por los estudiantes formular problemas. No obstante, no ofrecen recomendaciones precisas ni explícitas para poder abordar satisfactoriamente este propósito y garantizar la debida contribución al desarrollo del pensamiento creador, al razonamiento y la independencia cognoscitiva.

La formulación de problemas debe ocupar un espacio en la Didáctica de la Matemática, en el tratamiento de la situación típica "Ejercicios con Textos y de Aplicación", y brindar orientaciones precisas para su tratamiento como aparece para la resolución de problemas, con este fin brindamos las siguientes consideraciones metodológicas.

El proceso de formulación de problemas tiene dos fases esenciales:

- Ejercicios preparatorios.
- Elaboración de problemas

Diseño de ejercicios preparatorios

Las actividades preparatorias para la formulación de problemas son esenciales. Mediante ellas los estudiantes deben familiarizarse con los elementos estructurales de un problema, actividades que estarán en correspondencia con los objetivos y contenidos propios de cada grado, año, especialidad. De este modo, los estudiantes podrán identificar en un problema dado, la pregunta, los datos y las condiciones.

Algunas de esas actividades pueden ser las siguientes:

- Ejercicios destinados a señalar los datos, la pregunta y las condiciones del problema. Esta actividad puede realizarse en la clase, donde se presenta el sistema de problemas a resolver en cada una de las clases del sistema y el estudiante debe identificar cada uno de estos elementos estructurales.

- Análisis crítico de textos de problemas. El estudiante debe desarrollar un carácter crítico ante el análisis de textos de problemas. Para ello deben presentárseles problemas cuyos textos se hallen incorrectamente redactados (situaciones y datos absurdos), o los datos que en ellos se ofrecen resulten insuficientes o adicionales para solucionar los problemas. La actividad consiste en determinar de forma crítica las posibles incorrecciones.

 Reformulación de problemas. Derivada de la actividad anterior la acción de los estudiantes debe ir dirigida al perfeccionamiento del texto del problema y al completamiento de los datos en caso de ser necesario.

Otras actividades preparatorias pueden ser:

 Proponer la elaboración de otras preguntas a partir de un problema dado.

 Dados los datos, las condiciones y la pregunta, vincularlos adecuadamente mediante la narración de un hecho, formulando de esta manera el problema.

<u>Ejemplo</u>:

Plan de producción diaria: 90 latas de café

Producción del 20 de septiembre: 85,5 latas de café. ¿Cuál fue el por ciento de latas de café recogidas ese día?

 Dados los datos y las condiciones, elaborar la(s) pregunta(s) y vincular los elementos de la estructura mediante una narración, formular el problema.

<u>Ejemplo</u>:

Plan de producción diaria: 90 latas de café

Producción del 20 de septiembre: 4,5 latas de café menos que las que se produjeron diariamente.

 Dados los datos, elabora las condiciones, o sea, establece las relaciones matemáticas deseadas, elabora la pregunta, vincula los elementos de la estructura de un problema, formulándolo de esta manera, mediante una narración.

Ejemplo:

90 latas de café. 60 estudiantes

 Dada la pregunta, el estudiante busca los datos y las condiciones, establece los vínculos entre los elementos de la estructura del problema, quedando formulado.

Ejemplo:

¿Cuál es el área de la universidad?¿Cuántos metros de alambre se necesitan para cercarlo?

Esta propuesta de actividades contribuye a que los estudiantes se entrenen en el reconocimiento y utilización de los elementos estructurales de un problema; así como los prepara para enfrentar de manera independiente esta tarea.

Elaboración de problemas

La elaboración de problemas debe ser racional y para que sea efectivo su tratamiento metodológico le corresponde considerar los siguientes pasos:

 Recopilación de datos.

- Establecimiento de relaciones matemáticas deseadas con los datos.

- Formulación del problema.

- Comprobación de la formulación del problema.

PASOS PARA LA ELABORACIÓN DE PROBLEMAS	**PREGUNTAS TÍPICAS**
Recopilación de datos: Abarca la selección de la temática a tratar (si no ha sido dada) sobre situaciones prácticas de carácter político, económico, ideológico, social, científico y ambiental de la comunidad, provincia y país, así como la búsqueda de datos sobre la temática escogida.	-¿Cuál es el modelo matemático a que debe conducir el problema? -¿Qué características tienen los problemas tratados que se resuelven al aplicar ese modelo? -¿Qué temática abordar en el problema? -¿Qué datos utilizar?
Establecimientos de relaciones matemáticas deseadas con los datos: A partir del modelo matemático a utilizar y los datos seleccionados, se buscan relaciones que permitan su planteamiento.	-¿Cómo relacionar los datos (magnitudes) para obtener el modelo matemático? -¿Puede hacerse análogo a otros problemas? -¿Qué magnitudes serían conocidas y desconocidas?
Formulación del problema: Se redacta el texto del problema para lo que deben contextualizarse las relaciones encontradas, o sea, relacionar los elementos estructurales de un problema.	-¿Qué palabras claves utilizar según las relaciones entre las magnitudes? -¿Son suficientes los datos para formular el problema? -¿Cuál es el texto adecuado para estos datos?

PASOS PARA LA ELABORACIÓN DE PROBLEMAS	PREGUNTAS TÍPICAS
Comprobación de la formulación del problema: Se comprueba si la formulación es correcta al valorar: -Correspondencia entre las relaciones matemáticas y su expresión en el lenguaje común. -Si se utilizó adecuadamente la lengua materna y el vocabulario técnico. -La veracidad de la información que brinda el texto del problema.	-¿Se utilizó adecuadamente el vocabulario técnico y la lengua materna? -¿Existe coherencia en la redacción? -¿Son correctas las relaciones planteadas? -¿La información que brinda el problema es real?

Como parte de la comprobación, el problema también debe ser resuelto por el que lo elaboró y por otros profesores de la disciplina. Una forma de comprobar la formulación independiente de problemas por parte de los estudiantes es entregarle a un compañero el problema formulado por otro, con el fin de que este lo valore y, de ser necesario, haga las correcciones pertinentes y lo resuelva.

A modo de ejemplo presentamos a continuación, el tratamiento metodológico de la formulación de un problema que conlleva al planteamiento de una ecuación de segundo grado, en el que se señalan las actividades del profesor (P) y los estudiantes (A), como transcurriera en el marco de una clase.

P: _ ¿Cuál es el modelo matemático a que debe conducir al problema?

A: _ El problema debe conducir a una ecuación cuadrática.

P: _ ¿Qué características tienen los problemas tratados en clases que se resuelven mediante ecuaciones de segundo grado?

A: _ Son problemas relacionados con áreas de figuras geométricas, fórmula física de velocidad.

P: _ ¿De acuerdo con lo que tengo en la comunidad cuál de las variantes puedo utilizar? ¿Qué temática tratar?

A: _ Puede ser sobre áreas de figuras geométricas porque en la zona donde vivo hay organopónicos que tienen forma rectangular y estos tienen gran importancia en la agricultura urbana.

P: _ ¿Conocen las dimensiones del organopónico? ¿Pueden calcularse?

A: _ El organopónico de forma rectangular tiene 78,0 m de largo y 45,0 m de ancho.

P: _ ¿Qué magnitudes darían o cuáles pedirían?

A: _ Como el problema tiene que conducir a una ecuación de segundo grado pueden pedirse las dimensiones del organopónico y dar su área.

P: _ ¿Se conoce el área? ¿Puede calcularse?

A: _ Sí, el área del organopónico es de 33375 m2

P: _ ¿Cómo expresar la longitud del largo y el ancho?

A: _ Una de estas magnitudes (largo o ancho) debe ser desconocida y la otra relacionarla con ella.

P: _ Consideremos desconocido el ancho. ¿Qué relación plantear entre el largo y el ancho? ¿Qué palabras claves utilizar?

A: _ Si el largo mide 78,0 m y el ancho 25,0 m. Entonces 78 = 3. 25 + 8, entonces las palabras claves pueden ser: triplo, excede, aumentado, tres veces.

P: _ ¿Cómo expresar estas relaciones con la utilización del lenguaje común?

A: _ El largo del organopónico es el triplo del ancho aumentado en 8.

P: _ ¿Qué datos tenemos? ¿Puede ya elaborarse un problema?

A: _ Tenemos un organopónico de forma rectangular, su área y la relación entre su largo y el ancho.

P: _ Expresen estos datos en un texto adecuado.

A:_ Al fomentar la agricultura urbana, en el distrito José Martí se han creado organopónicos uno de los ubicados en Micro 9, tiene forma rectangular y su largo es el triplo del ancho aumentado en 8,0 m. Si la superficie del mismo es de 3 375 m2. ¿Cuáles son las dimensiones del organopónico? Y ¿cuántos metros de cerca se necesitan para cercarlo completamente?

Finalmente, él realiza las preguntas de comprobación correspondientes a este paso, y orienta a los estudiantes resolver el problema. La estructuración de la formulación de problemas a partir de estos pasos brinda a los estudiantes un modelo con carácter heurístico para su proceder de manera independiente.

- Recopilación de datos

La recopilación de datos abarca la selección de la temática a tratar, si no ha sido dada, sobre situaciones prácticas de carácter político, económico, ideológico, científico y ambiental de la comunidad, provincia, estado, municipio, país; así como la búsqueda de datos relacionados con la temática escogida.

Para establecer relaciones matemáticas deseadas con los datos, hay que tener en cuenta el modelo matemático a utilizar y los datos seleccionados para buscar relaciones que permitan su planteamiento. La formulación del problema abarca la redacción del texto del mismo, para lo que deben contextualizarse las relaciones encontradas; o sea, relacionar los elementos estructurales de un problema en una temática. Finalmente, en la comprobación de la formulación del problema se debe comprobar si esta es correcta, al valorar:

- Correspondencia entre las relaciones matemáticas y su expresión en el lenguaje común.

- Utilización adecuada de la lengua materna y el vocabulario técnico.

- La veracidad de la información que brinda el texto del problema.

1.3.2 Línea directriz: Geometría y trabajo con magnitudes

En esta directriz es importante considerar la teoría de Galperin y seguidores (89), relacionada con la etapa de las acciones mentales. En este sentido, vale la pena aludir al modelo de Van Hiele para el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes. Dicho modelo proviene de sus creadores, los profesores Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele Geldof, y está formado por dos partes:

- La primera de ellas es descriptiva, en ella se identifica una secuencia de tipos de razonamiento, llamados "niveles de razonamiento", a través de los cuales progresa la capacidad de razonamiento de los individuos desde que inicia el aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual.

- La segunda parte aporta a los profesores directrices sobre cómo pueden ayudar a sus estudiantes para a alcanzar con más facilidad un nivel superior de razonamiento, estas directrices se conocen con el nombre de "fases de aprendizaje".

Realizaremos una breve descripción de ambas partes e ilustraremos estas para que puedan comprender mejor los dos componentes del modelo.

Los niveles de razonamiento

NIVEL 1 (de reconocimiento)

Este es el nivel más elemental de razonamiento. No obstante, no es exclusivo de este período sensitivo; en realidad, cada vez que se presente a los estudiantes algún concepto geométrico nuevo, estos van a pasar por el nivel 1, aunque a veces este paso sea muy rápido. Se caracteriza porque los estudiantes:

- Perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades, por lo que pueden incluir atributos irrelevantes en las descripciones.

- Perciben las figuras como objetos individuales, o sea, no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de la misma clase.

- Se limitan a describir el aspecto físico de las figuras, los reconocimientos, diferenciaciones o clasificaciones de las figuras que realizan se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas.

- En muchas ocasiones las descripciones de las figuras están basadas en su semejanza con otros objetos (no necesariamente geométricos) que se conocen; suelen usar frases como "... se parece a...", "... tiene forma de ...".

- No suelen reconocer explícitamente las partes de que se componen las figuras, ni sus propiedades matemáticas.

NIVEL 2 (de análisis)

Este nivel se diferencia del anterior; lo cual se podrá apreciar a través de las características que se enumerarán a continuación. En él los estudiantes tendrán otra forma de observar las figuras geométricas, ya son conscientes de que pueden estar formadas por elementos y de que son portadoras de ciertas propiedades.

Otro avance importante respecto al nivel 1 está en la capacidad para reconocer que las figuras concretas que manipulan son (o pueden ser) representantes de una familia. Puede decirse que este nivel es el primero que ofrece un razonamiento "matemático", en tanto los estudiantes pueden descubrir y generalizar (necesariamente a partir de la observación y la manipulación) propiedades que todavía no conocían, aunque utilicen las de una figura como si fueran independientes entre sí. Ejemplo: no relacionaría la existencia de ángulos de 900, la perpendicularidad o el paralelismo de lados. Este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Se dan cuenta de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y de que están dotadas de propiedades matemáticas, pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal.

 Reconocen las propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos, pueden deducir otras propiedades y generalizarlas a partir de la experimentación.

 No son capaces de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades.

NIVEL 3 (de clasificación)

Este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

 Comienzan a desarrollar la capacidad de razonamiento formal (matemático), son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y descubrir esas implicaciones; en particular, pueden clasificar lógicamente las diferentes familias de figuras a partir de sus propiedades o relaciones ya conocidas (sus razonamientos siguen apoyados en la manipulación).

 Pueden describir una figura de manera formal, o sea, pueden ofrecer definiciones matemáticamente correctas, comprenden el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.

 Si bien comprenden en los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal, los ven de forma aislada, ya no comprenden la necesidad del encadenamiento de estos pasos ni entienden la estructura de una demostración: entienden la demostración explicada por el profesor o desarrollada en el libro de texto, pero no son capaces de construirla por sí mismos.

- No comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.

NIVEL 4 (de deducción formal o rigor)

En este nivel se logra la plena capacidad de razonamiento lógico matemático y, al mismo tiempo, la capacidad para tener una visión globalizadora del área que se estudia. Se caracteriza porque los estudiantes:

- Pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones (de varios pasos) ya tiene sentido para ellos y sienten su necesidad como único medio para verificar la veracidad de la afirmación.

- Pueden comprender la estructura axiomática de las matemáticas, el sentido y la utilidad de términos no definidos, axiomas, teoremas.

- Aceptan la posibilidad de llegar al mismo resultado desde diferentes premisas (existencia de demostraciones alternativas del mismo teorema), la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto.

Principales características de los niveles

1. Jerarquización y secuencialidad.

Cada nivel se apoya en el anterior, tiene una estructura recursiva, por lo que se deben plantear tareas que impliquen la sistematización constante de los niveles de razonamientos precedentes. No se puede alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado el nivel inferior.

2. Estrecha relación entre el lenguaje y los niveles.

Las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los cuatro niveles no se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la forma de expresarse y en el significado que se le otorga a determinado vocabulario (ejemplo a la palabra *demostrar*). Por lo que a cada nivel le corresponde un tipo de lenguaje específico.

El paso de un nivel a otro se produce de manera gradual y durante algún tiempo el estudiante se encontrará en un período de transición en el que combinará razonamientos de un nivel y de otro.

Pasemos a analizar ahora el modelo de Van Hiele.

Fases del modelo

1ra fase: Información.

En ella se establece contacto con los estudiantes e informa el campo de estudio en el que se va a trabajar, los tipos de problemas que se abordarán, con qué materiales van a trabajar y se busca motivarlos. Predomina el constante intercambio con los estudiantes, lo que posibilita al docente saber el nivel en que se encuentran y los conocimientos previos sobre el tema.

2da fase: Orientación dirigida.

Tiene como objetivo fundamental que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan conceptos, propiedades de figuras, entre otros aspectos, apoyados en los materiales facilitados por el docente. Por lo que se les deben proponer tareas dirigidas hacia estos aspectos y debidamente graduadas en un orden progresivo.

3ra fase: Explicitación.

Tiene como finalidad que los estudiantes socialicen sus resultados, intercambien, se autovaloren, covaloren. Realizan revisión del trabajo hecho antes, ponen a punto las conclusiones a las que arriban y perfeccionan la forma de expresarse.

4ta fase: Orientación libre.

Los estudiantes aplican los conocimientos y el lenguaje que acaban de adquirir a situaciones diferentes a las anteriores. Aunque conocen el campo de estudio deben perfeccionarlo, para ello el docente debe plantearles problemas que tengan varias soluciones. Las tareas deben contemplar la utilización y combinación de los nuevos conceptos, propiedades y formas de razonamiento. Algunos problemas de esta fase deben presentar situaciones nuevas, ser abiertos, con varios caminos.

5ta fase: Integración.

En esta deben proponerse tareas que le posibiliten al estudiante aplicar los nuevos conocimientos y combinarlos con otro aprendidos anteriormente, se trata de condensar todo lo aprendido, para propiciar comprensiones globales, dentro del todo lo conocido hasta el momento.

Si estos elementos teóricos son combinados con la teoría de la actividad de Leontiev y la concepción de Galperin y seguidores sobre el desarrollo por etapas de las acciones mentales, se podría asegurar un avance sobre bases científicas, para el desarrollo del pensamiento geométrico de nuestros estudiantes.

A continuación mostramos ejemplos de actividades concebidas por unos colegas españoles donde se emplean estos niveles y fases en el tratamiento de los cuadriláteros, de manera que ilustran lo que teóricamente expusimos con anterioridad.

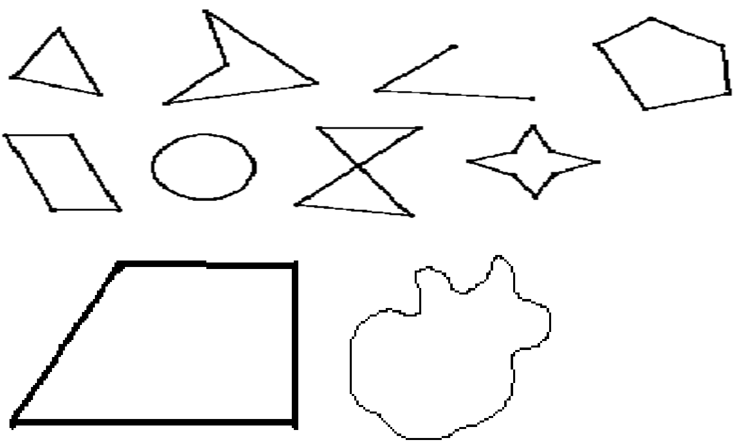
Según Corberán y otros (1994), las actividades se restringen al completamiento del nivel 2 y a garantizar el tránsito al nivel 3 dado que en la etapa de diagnóstico se arrojó que para este contenido ya los estudiantes habían vencido el nivel 1.

CUADRILÁTEROS

NIVEL 2

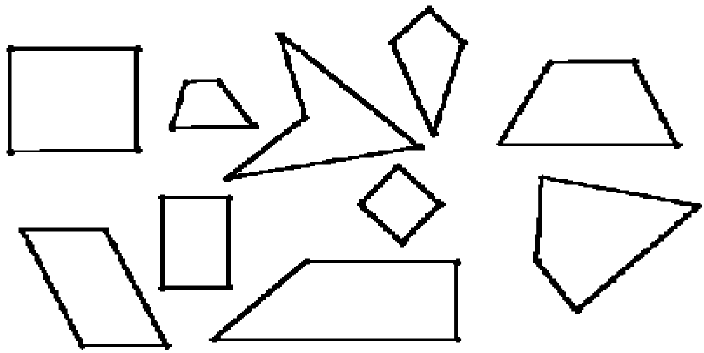
Fase de Información

Tarea: Observa detenidamente cada una de las figuras siguientes. Indica aquellas que no son cuadriláteros. Diga en qué se basa para cada caso.



Fase de Orientación dirigida

Tarea: Observa detenidamente la colección de cuadriláteros y determina qué propiedades y características poseen. Confecciona una lista con todas ellas.



El objetivo será analizar los diferentes cuadriláteros, con el fin de confeccionar un listado de propiedades. La relevancia o no de las características o propiedades no será lo importante inicialmente. Lo verdaderamente importante será que aporten el mayor número de ellas. Se ordenará confeccionar fichas con las propiedades, de manera que puedan ordenar las propiedades del tipo:

PARALELISMO DE LADOS	Lados paralelos dos a dos Un par de lados paralelos Sin lados paralelos
ÁNGULOS RECTOS	Cuatro ángulos rectos Tres ángulos rectos y solo tres Dos ángulos rectos y solo dos Un ángulo recto y solo dos

ÁNGULOS NO RECTOS	Ángulos iguales dos a dos Dos ángulos iguales y dos desiguales Cuatro ángulos iguales
CONGRUENCIA DE LADOS	Cuatro lados congruentes Congruentes dos a dos Dos congruentes y dos no congruentes Cuatro lados no congruentes
DIAGONALES	Diagonales de igual longitud Diagonales que se cortan en el punto medio Diagonales de igual longitud y que se cortan en su punto medio Diagonales de desigual longitud y que se cortan en su punto medio Diagonales perpendiculares Diagonales de distinta longitud Diagonales que no se cortan en el punto medio Diagonales que no se cortan

Fase de Orientación libre

Tarea: ¿De qué cuadrilátero se trata?

Para cada propiedad enunciada, dibuja todos los cuadriláteros que la cumplan.

1. Con lados paralelos dos a dos.

2. Con cuatro ángulos rectos.

3. Con un solo par de lados paralelos.

4. Con diagonales de igual longitud.

5. Con diagonales que se cortan en sus puntos medios.

Embaldosados: ¿Con qué cuadriláteros podemos recubrir el plano?

Diagonales: ¿Qué relación encuentras entre las distintas longitudes de las diagonales y los distintos tipos de cuadriláteros?

Transformar: Para transformar un rombo en un cuadrado, ¿qué propiedades cambiarías? ¿Y un paralelogramo en un rectángulo?

Cálculo de medidas: Calcula la medida de los ángulos de un rombo si el ángulo obtuso mide 108 grados.

Fase de Integración

Aquí el trabajo tendrá como objetivo la recogida y ordenación de propiedades. Se incluirán actividades como las siguientes:

PROPIEDADES	TIPO DE CUADRILÁTERO
- Tiene un par de lados paralelos - Tiene tres ángulos rectos y solo tres - Cuatro ángulos iguales - Diagonales que se cortan en sus puntos medios - Dos pares de lados iguales - Dos pares de ángulos iguales - Diagonales que no se cortan - Lados iguales dos a dos - Solo un ángulo recto - Las diagonales no se cortan	- Paralelogramo - Trapecio - Rombo - Rectángulo - Cuadrado - Cometa - Cuadrilátero cóncavo

Asimismo, se tendrán en cuenta las que a continuación se enumeran:

- ¿Qué cuadriláteros cumplen que sus diagonales se cortan perpendicularmente y en su punto medio?

- Dibuja todos los cuadriláteros que tengan sus cuatro lados iguales.

- ¿Qué cuadriláteros tienen dos ángulos agudos y dos obtusos?

- ¿Cómo le describirías verbalmente a un amigo un trapecio isósceles?

NIVEL 3

Fase de Orientación dirigida

Tarea: Agrupa las fichas de cartulina que contengan las propiedades que posee el rectángulo. ¿Podríamos eliminar algunas de estas fichas de manera que el rectángulo quedase bien caracterizado?

En esta tarea se pretende el análisis de las propiedades relevantes e irrelevantes que nos llevará a una definición de rectángulo. El procedimiento usado se repetirá para cada uno de los tipos de cuadriláteros.

Tarea: Completa las tablas siguientes esbozando cuadriláteros que verifiquen simultáneamente las características que se indican:

		Pares de lados paralelos 0	1	2
Pares de lados Iguales	0			
	1			
	2			

		Pares de lados paralelos 0	1	2
Número de ángulos rectos	0			
	1			
	2			

Al utilizar en esta tarea tablas de doble entrada, se propiciará un estudio sistematizado de la relación entre dos propiedades como paso previo a tareas de clasificación.

Tarea: Completa las siguientes proposiciones:

- Si los cuatro lados son iguales los lados opuestos son ___________________
- Si las diagonales son iguales entonces sus lados son ____________________
- Si tienen dos ángulos (opuestos) rectos los lados son ____________________

Con estas proposiciones se analizan relaciones de implicación.

Tarea: Cada casilla es de intersección de una fila y una columna. Anota en cada casilla las propiedades comunes a los cuadriláteros de las correspondientes fila y columna.

	CUADRADO	RECTÁNGULO	ROMBO	PARALELO-GRAMO	TRAPECIO	COMETA
Cuadrado	____					
Rectángulo	____	____				
Rombo	____	____	____			
Paralelogramo	____	____	____	____		
Trapecio	____	____	____	____	____	
Cometa	____	____	____	____	____	____

El objetivo de esta tarea es propiciar en los estudiantes la realización de clasificaciones inclusivas. En el desarrollo de la misma nos parece interesante formular explícitamente cuestiones como:

- ¿Un cuadrado es un rectángulo?
- ¿Un rectángulo es un cuadrado?
- Los cuadrados, ¿son rombos, y viceversa?
- ¿Un rectángulo es un paralelogramo?
- Los paralelogramos, ¿son trapecios, y viceversa?

Tarea: Completa las siguientes proposiciones y justifica la respuesta que das:

- "Lados paralelos dos a dos implica ________________"
- Lados a) congruentes b) no congruentes c) congruentes dos a dos.

Busca contraejemplos si es necesario.

- ¿Es cierto el recíproco?
- "Pares de lados paralelos dos a dos implica ________________"
- Ángulos a) iguales b) desiguales dos a dos c) opuestos iguales dos a dos

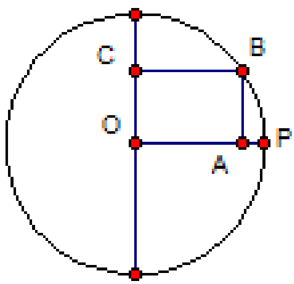
Busca contraejemplos si es necesario.

□ ¿Es cierto el recíproco?

□ Se persigue el establecimiento de condiciones necesarias y suficientes.

Fase de Orientación libre

Problema: En la figura, O es el centro de la circunferencia. El cuadrilátero OCBA es un rectángulo, donde OA = 5 y AP = 1. ¿Cuánto mide CA? Razona la respuesta.



Definiciones: Justifica que cualquiera de las tres definiciones siguientes caracterizan a un cuadrado:

□ Un cuadrado es un paralelogramo con un ángulo recto y con diagonales perpendiculares.

□ Un cuadrado es un rombo con diagonales de igual longitud.

□ Un cuadrado es un rectángulo con lados de igual longitud.

Fase de Integración

Se propone realizar un análisis reflexivo de las proposiciones ya estudiadas en las fases anteriores que relacionan propiedades y la equivalencia entre ellas.

El vínculo de las tres áreas de la Matemática

Otro elemento importante a tener presente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática es el vínculo de las tres áreas que para el caso de nuestros programas constituyen esenciales: Aritmética, Álgebra y Geometría.

Las orientaciones precisan que es necesario que toda actividad que se diseñe, siempre que sea posible vincule las tres áreas para hacer ver a los estudiantes que la matemática es una sola, independientemente que se estructure o se le dé un orden para su estudio. De esta manera, siempre que se busque una situación problémica para enfrentar el nuevo contenido debe realizarse con la óptica que permita el vínculo de las tres áreas.

<u>Ejemplo</u>: Plantear problemas, siempre que sea posible, con características similares a este:

Un centro X de una provincia/estado está responsabilizado con la producción de 6 caballerías de tierra. Si la cantidad que falta por sembrar es el doble de las sembradas, ¿qué cantidad de tierra tiene disponible para la siembra?

Si el terreno que falta por sembrar tuviera forma rectangular, determina posibles estimaciones del largo y el ancho del mismo.

En este ejemplo se verifica la integración entre las tres áreas porque necesita apoyarse en el Álgebra para resolver la situación inicial (cantidad de tierra que no se ha sembrado).

Al hacer una tabla se tiene que:

	SEMBRADA	SIN SEMBRAR	TOTAL
CANTIDAD DE TIERRA (cab)	x	2x	6

Como aparece una sola variable es necesaria una sola ecuación que se encuentra a partir de que si a la cantidad de caballerías sembradas le adicionamos la cantidad que falta por sembrar se obtiene el total de tierra que tiene el centro X bajo su responsabilidad (6 cab), o sea, $x + 2x = 6$ de donde se obtiene que la cantidad de tierra que falta por sembrar es 4 cab.

Pero el problema no termina, para resolver la segunda situación debemos apoyarnos en los conocimientos de Geometría. Si el terreno tuviera forma rectangular, donde se debe tener en cuenta la relación de inclusión del cuadrado como un caso particular, su área se determina al multiplicar el largo por ancho.

La Aritmética se utiliza en reconocer que si el área es 4 y se encuentra al multiplicar sus dimensiones, entonces lo que se busca son parejas de números que multiplicados su producto sea 4 [(4;1), (2;2), (8;1/2), (12;1/3), (7;4/7), (19;4/19)], que se pueden generalizar mediante la utilización del Álgebra y plantear: toda pareja de números que tenga la forma (4a; 1/a) o la forma (a; 4/a) su producto es 4, o sea: $4a \cdot 1/a = 4$ ó $a \cdot 4/a = 4$.

De ahí que en la segunda situación del problema se puedan realizar infinitas estimaciones para el largo y el ancho. Aquí también se propicia el trabajo con el sistema internacional de unidades, al solicitar la conversión a otras unidades.

El uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas

El desarrollo de métodos y materiales nuevos se ha incrementado notablemente en las últimas décadas del siglo XX y principios del XXI, en el que la enseñanza asistida por computadoras es la más sobresaliente de ellas (Vaquero y Fernández de Chamizo, 1987). Es un hecho real que en el mundo contemporáneo existen potentes programas de software de matemáticas, que corren sobre PCs, que se manejan por medio de interfaces cada vez más sencillas y son utilizados para aprender o hacer matemáticas y para resolver profesionalmente problemas.

La historia del uso de las computadoras en la educación se inicia al final de los años 50, aunque en esa época algunas universidades las utilizaban con propósitos administrativos. De manera aislada surgieron grupos que realizaban investigaciones relacionadas con el empleo de la computadora en el proceso de enseñanza. Surgió entonces, en la década de los 60, una tendencia pedagógica denominada Tecnología Educativa cuyo centro de interés consistía en elaborar una “tecnología de la instrucción” similar al concepto de la tecnología de la producción material. Por ello, la atención se dirigió a los métodos y medios más que a los contenidos.

Las primeras aplicaciones para la enseñanza, desarrolladas en computadoras tuvieron, desde el punto de vista de las teorías del aprendizaje, su base científica en el Conductismo. Las generaciones siguientes de aplicaciones para la enseñanza, desarrolladas en computadoras recibieron la influencia de la Psicología Cognitiva y la Inteligencia Artificial por lo que surge una nueva generación de softwares educativos denominada “Instrucción Inteligente Asistida por Computadoras” (Rodríguez y otros, 2002).

Según Vaquero y Fernández de Chamizo (1987), el uso de la computadora en sus diversas modalidades ofrece, sobre otros medios de enseñanza, ventajas tales como:

- Participación activa del estudiante en la construcción de su propio aprendizaje.

- Interacción entre el estudiante y la máquina.

- La posibilidad de dar una atención individual al estudiante.

- La posibilidad de crear micro mundos que le permiten explorar y conjeturar.

- Desarrollo cognitivo del estudiante.

- Control del tiempo y secuencia del aprendizaje por el estudiante.

- Retroalimentación inmediata y efectiva, a través de la cual el estudiante puede aprender de sus errores.

En este sentido, resultaría atinado cuestionarse: ¿cuál sería el comportamiento ante esta problemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática?

> La Educación Matemática tiene el reto ineludible de sintonizar con el mundo nuevo. Eso quiere decir usar de manera normal los nuevos medios, aceptando calculadoras y computadoras y abandonando quizás unos modelos unidos a la computación manual o a la descripción cuantitativa del mundo físico para poder entender unos modelos más unidos a problemas de la información, análisis más cualitativos, etc. (...) Nuestra educación debe irse conservando y actualizando lo que siempre será válido, pero debe abrir las puertas a las nuevas tendencias. (Alsina, 1996, p. 27)

> Aunque la tecnología no es la solución a los problemas de la enseñanza–aprendizaje de las Matemáticas, hay indicios de que ella se convertirá paulatinamente en un agente catalizador del proceso de cambio en la Educación Matemática. Gracias a las posibilidades

que ofrece de manejar dinámicamente interactivos, la tecnología abre espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr por medios tradicionales como el lápiz y el papel), en las que él puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración. Estas experiencias matemáticas son fructíferas siempre que se tenga en cuenta la complejidad del contenido matemático a enseñar, la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas y el papel fundamental que deben jugar los diseñadores del currículo y los profesores en el diseño e implantación de situaciones didácticas que, teniendo en cuenta las dificultades y necesidades de los estudiantes, aprovechen la tecnología para crear espacios en los que el estudiante pueda construir un conocimiento matemático más amplio y más potente. El principal aporte de la tecnología consiste en que la interacción entre el profesor y el estudiante está cambiando la visión que los actores tienen del contenido matemático y del proceso didáctico.(Gómez, 1997, p. 5)

En los Estándares Curriculares del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) se ha planteado desde hace varios años lo referido a la incorporación de las nuevas tecnologías a la enseñanza de las Matemáticas. De ahí que desde 1990, se indique que en todas las aulas deban existir una computadora con fines ilustrativos, que todos los estudiantes deban tener acceso a una computadora para trabajar individualmente y en grupo, y que los mismos aprendan el manejo de la computadora como herramienta para procesar información y realizar cálculos en las investigaciones y resoluciones de problemas.

La nueva tecnología no solo ha hecho más fáciles los cálculos y la elaboración de gráficas sino que también ha cambiado la naturaleza misma de los problemas que interesan a la matemática y los métodos que usan los matemáticos para investigarlos. En la versión 2000, plantean el tema desde tres puntos de vista bien diferenciados: el principio de la tecnología, la posibilidad que ofrece la tecnología de ampliar el aprendizaje de la matemática y cómo la tecnología influye en qué matemática se debe enseñar. A continuación se exponen los citados principios:

- *El principio de la tecnología:* las tecnologías electrónicas son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer matemáticas. Proporciona imágenes visuales de ideas matemáticas, facilita la organización y análisis de datos y realiza cálculos eficientemente y con exactitud. Soporta investigaciones de los estudiantes en todas las áreas de la matemática. La existencia, versatilidad y poder de la tecnología exige reexaminar tanto qué matemática deben aprender los estudiantes como de qué manera pueden aprenderla mejor.

- *La tecnología amplía el aprendizaje de la Matemática:* con calculadoras y computadoras los estudiantes pueden examinar más ejemplos o formas de representación que las posibles de realizar a mano, por lo tanto, pueden hacer y explorar conjeturas fácilmente. El poder gráfico de las herramientas tecnológicas da acceso a modelos gráficos que son más poderosos pero que los estudiantes son incapaces o están imposibilitados de generar independientemente. La capacidad computacional de las herramientas tecnológicas extiende el rango de problemas accesible a los estudiantes y además le permite ejecutar procedimientos rutinarios rápidamente y con exactitud, lo que permite más tiempo para la modelación y la conceptualización.

- *La tecnología influye en qué Matemática es enseñada:* la tecnología no solo influye en cómo la matemática es enseñada y aprendida, sino también que con ella los jóvenes pueden explorar y resolver problemas que involucran grandes números o pueden investigar características de figuras usando software dinámico de Geometría. Los estudiantes de la escuela elemental pueden organizar y analizar grandes conjuntos de datos. Asimismo, los de los grados medios pueden estudiar relaciones lineales y las ideas de recubrimientos y cambio uniforme con representaciones por computadoras y realizando experimentos físicos con sistemas de laboratorios. Por tanto, son diversos los usos que se le ha dado a la computadora en la enseñanza de la referida asignatura, algunos con mayor efectividad que otros, pero todos contribuyentes a enriquecer el proceso de aprendizaje. Entre ellos tenemos:

 Computadora como pizarrón electrónico

El uso de la computadora como pizarrón electrónico podemos enmarcarlo dentro de la modalidad *Computador como herramienta*. Sin embargo, para que tanto docentes como discentes puedan utilizar la computadora como pizarrón electrónico, se requiere de un diseño de software especial. Su objetivo principal es escribir, dibujar y calcular con el fin de mostrar e ilustrar conceptos. Se pueden mostrar procedimientos en detalle o evitar cálculos tediosos. Generalmente, en esta aplicación hay un solo computador en el aula el cual se utiliza para hacer la demostración a todos los estudiantes.

 Computadora como tutor

Esta es una de las modalidades más utilizadas en matemática debido a que ayudan a solucionar algunos problemas educativos tales como:

 Numerosa población estudiantil que impide la atención de las diferencias individuales.

 El alto índice de fracasos debido a la falta de uniformidad en el desarrollo cognitivo de los integrantes de los grupos.

 Motivación extrínseca hacia el estudio de la materia.

 La posibilidad de una rápida actualización de los materiales educativos.

- Falta de instrucción de alta calidad, accesible a gran escala.

En matemática, se han aplicado desde los más rudimentarios tutores lineales hasta los más sofisticados tutores inteligentes. “Algunos de ellos, técnicamente muy bien realizados, con diseños de pantallas sumamente atractivos, pero con objetivos restringidos que llevaban únicamente a la mecanización. Otros, la mayoría realizado por investigadores en educación matemática, con diseños de pantallas que no llegan a competir en espectacularidad pero que consideran elementos valiosos de análisis de errores y experimentación” (Hitt, 1991, 18).

- Para ejercitación y práctica

Esta modalidad es la más aplicada en Matemática, debido a la naturaleza misma de la materia. Según Galvis (1978), esta modalidad permite reforzar las dos fases finales del proceso de instrucción: aplicación y retroinformación, mediante la técnica de repetición. A través de este tipo de software el estudiante puede complementar el estudio y la comprensión de conceptos, a los que el profesor no podrá dedicarle más tiempo en el aula. Sin embargo, para que esta modalidad realmente sea efectiva, previo al uso de un software de este tipo, el estudiante ha debido adquirir los conocimientos de conceptos y destrezas que va a practicar.

En matemática es importante que el software contemple no solamente la práctica sino que proporcione al estudiante ayuda en la solución de los problemas y brinde una retroinformación completa, sin limitarse a indicar que se ha cometido un error, sino brindando información acerca del tipo de error.

- En la simulación

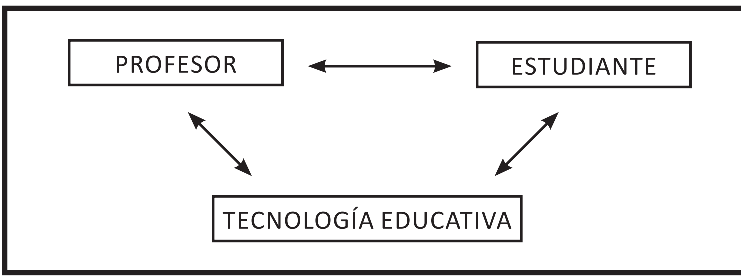
La simulación de fenómenos naturales con el uso de la computadora la convierten en un elemento importante en educación. Debido a que los softwares de este tipo apoyan el aprendizaje por descubrimiento, en matemática son utilizados con gran frecuencia para propiciar el establecimiento de reglas y demostración de proposiciones y teoremas.

Una de las cualidades que posee este tipo de software es el alto grado de motivación que logra en el aprendizaje a través del ensayo-error (orientado por el profesor) que le permite descubrir cosas que posteriormente confirma que son correctos y fueron descubiertas por brillantes matemáticos quizás algunos siglos atrás.

Con la ayuda del simulador y la orientación del profesor, el estudiante descubre cosas que fijará en su estructura cognitiva de manera más natural que si le son proporcionadas en clases solo para que las entienda y las recuerde para luego aplicarlas. Esta herramienta permite al estudiante ir construyendo un puente entre las ideas intuitivas y los conceptos formales.

Rol del profesor ante la incorporación de las nuevas tecnologías en las clases de Matemática

Unamanerasimplificadaderealizarunarepresentación de cómo ocurre en el proceso docente educativo, la relación profesor (P), la tecnología educativa (TE) y el estudiante(a) (A), es verlos como los vértices de un triángulo PTA.



Durante 500 años, el libro, la pizarra y el laboratorio o taller han sido la tecnología educativa, los instrumentos de los que el profesor en persona se auxiliaba para montar sus procesos de transmisión de ideas y conocimientos o de desarrollar habilidades en el estudiante(a). Al cambiar la tecnología se alteran inevitablemente las relaciones multidireccionales, de modo que se hace imprescindible rediseñar el proceso docente educativo y establecer unas nuevas relaciones, en las que se tengan en cuenta el cambio y las potencialidades de las nuevas tecnologías educativas, para mantenernos a la altura del tiempo que nos ha tocado vivir y preparar a los estudiantes para enfrentar esa realidad y resolver los problemas que se les presentarán. Desde luego, implicará también el cambio de roles que uno u otro desarrollan dentro del proceso.

En el uso de las computadoras para la enseñanza de la matemática, se presentan dos alternativas que tienen implicación pedagógica y económica diferente. Una es el aula de computadoras (lo que denominamos laboratorio de computación), donde van los estudiantes a trabajar con programas. Otra es una computadora con proyector en el aula, la cual se convierte en una herramienta, principal o accesoria, integrada en el desarrollo de la clase a la que se puede acceder cuando haga falta.

Independientemente de la forma de uso de la tecnología adoptada por el docente, tanto los estándares curriculares como los contenidos básicos comunes coinciden en que el uso efectivo de la tecnología en la clase de Matemática dependen del docente. Además, que la tecnología no es una panacea, que como toda herramienta de enseñanza, se puede usar bien o pobremente y, por sobre todo, que los docentes deben usar la tecnología para mejorar las oportunidades de aprendizaje seleccionando o creando tareas matemáticas que tomen en cuenta las ventajas que la tecnología ofrece para resolverlas en forma más eficiente (graficar, visualizar, calcular).

Por otra parte, también coinciden en que la tecnología no remplaza al profesor de Matemática sino que los docentes juegan importantes roles en la clase, al tomar decisiones que afectan el aprendizaje de los estudiantes de forma que puedan vivir experiencias que aporten a la construcción o reconstrucción de su conocimiento matemático. Los docentes deben decidir cuándo y cómo va a ser utilizada la tecnología. Por otro lado, cuando los estudiantes utilizan computadoras, los docentes tienen la oportunidad de observarlos y focalizar su atención en sus razonamientos ya que cuando los estudiantes trabajan con tecnología, muestran formas de pensamiento matemático que de otra manera no es observable. Así, la tecnología ayuda en la evaluación, al permitir a los docentes examinar el proceso usado por los estudiantes (Astiz y otros, 2002).

“El profesor como el estudiante, al enfrentarse a estas nuevas situaciones puede construir una nueva visión del contenido matemático, del proceso de enseñanza-aprendizaje y del papel que cada uno de ellos puede jugar en la construcción del conocimiento” (Gómez, 1997, p. 11).

Autores cubanos de la Educación Superior han propuesto una estrategia para el uso de la informática en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática (Rodríguez y otros, 2000,). Dicha estrategia considera la utilización de la computadora en tres formas:

 Como medio de enseñanza en las clases para mostrar ejemplos, introducir conceptos y sus definiciones, mediante el uso de software o los denominados asistentes matemáticos (DERIVE, MATEMÁTICA, MATLAB, MATHCAB, REDUCE,

SCILAB, MAPLE LATEX, CABRI, GEÓMETRA).

 Como medio de aprendizaje, mediante tutoreales o entrenadores en el trabajo independiente del estudiante. A partir del banco que se ha situado en las escuelas.

 Como herramientas de cálculo, en la resolución de ejercicios de aplicación donde los cálculos pueden ser engorrosos, mediante asistentes en laboratorios y trabajos independientes que implican el uso del tiempo de máquinas.

La estrategia propone además, la necesidad de realizar un análisis del currículo con la finalidad de perfeccionarlo. Para ello es necesario un adecuado diagnóstico de los objetivos y contenidos que deben ser modificados a partir del uso de la computadora en el proceso de enseñanz-aprendizaje, y la determinación en cuáles softwares educativos contribuyen a alcanzar resultados superiores.

Campistrous y Rizo (2002) realizaron una propuesta para el empleo de esta concepción en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría, ante el planteamiento de algunas interrogantes tales como: ¿Cuáles son los cambios en el sistema de trabajo que habría que producir? ¿Cuál sería el objetivo de introducción en cada caso? ¿Qué instrumentación didáctica realizar para que sea exitosa su introducción? ¿Qué recursos tecnológicos emplear y como hacerlo?

Ellos reflexionaron la necesidad de discutir cómo se ha estado enseñando la Geometría durante miles de años y cómo se puede iniciar un proceso de cambio en ello para pasar de una manera estática a una dinámica. Además, incluyeron el análisis de los cambios curriculares para el uso tanto de la calculadora como la computadora, sin límites de edad siempre y cuando se precisen los propósitos de su uso a partir de las características de los escolares según sus edades, siempre que su uso este orientado a:

- Concentrarse en el proceso de resolución de problemas y solo en el cálculo formal clásico de la geometría, como es el caso de perímetros, áreas, volúmenes.

- Explorar, desarrollar y reforzar conceptos y relaciones geométricas.

- Utilizarla como medio heurístico, para la búsqueda de relaciones, el planteo de conjeturas de modo de dar acceso a otras formas de pensamiento que van más allá de los algoritmos propiamente dichos.

- Objetivar vías de demostración de propiedades de las figuras geométricas.

Los cambios en conocimientos y habilidades que ellos proponen introducir, sin obviar las clásicas del trabajo en la geometría y algunos recursos didácticos pertinentes, en una primera aproximación, de cómo estructurar los contenidos por etapas, son:

PRIMER MOMENTO DEL DESARROLLO

Etapa preparatoria

Inicio de las primeras ideas sobre la movilidad de las figuras para comprobar experimentalmente relaciones de congruencia. Uso de clavijelos y ligas para desarrollar la habilidad de “mover” en una figura (GEOPLANO como entrenador). Reproducción en papel cuadriculado. Superponer, medir, comparar.

SEGUNDO MOMENTO DEL DESARROLLO

Etapa preparatoria y de exploración

Continuación del trabajo intuitivo operativo con figuras geométricas elementales. Igualdad por superposición. Relaciones de paralelismo y perpendicularidad. Mover figuras sobre otras. Mover una figura. Conservación de propiedades cuando se producen movimientos en una figura. Primeras ideas sobre simetrías de figuras y sobre el perímetro y áreas de figuras simétricas. Ampliación de las ideas sobre movilidad de las figuras para comprobar experimentalmente relaciones de congruencia, y conservación de otras propiedades como el paralelismo y la perpendicularidad. Continuación del uso del geoplano para desarrollar la habilidad de “mover” en una figura. Reproducir en papel cuadriculado. Superponer, medir, comparar.

TERCER MOMENTO DEL DESARROLLO

Etapa de exploración, hacer conjeturas y pruebas

Inicio de la etapa deductiva. Igualada por movimientos geométricos del plano (simetrías y traslaciones). Mover en una figura. Exploración de propiedades que se conservan cuando se producen movimientos en una figura. Propiedades básicas de las figuras elementales. Búsqueda de teoremas relacionados con la congruencia. Cálculo de perímetros, áreas, volúmenes. Búsqueda de propiedades asociadas a estos conceptos. Continuación de la ampliación de las ideas sobre movilidad de las figuras para comprobar experimental y formalmente, relaciones de congruencia y conservación de otras propiedades como igualdad, el paralelismo y la perpendicularidad. Búsqueda de elementos simétricos en una figura y en un par de ellas. Continuación del uso del geoplano para desarrollar la habilidad "mover" en figuras.

Uso de supercalculadoras (principalmente por el docente) como medio heurístico de apoyo a la exploración, comprensión y búsqueda de casos particulares y límites en la demostración de propiedades. Reproducción (simulación) del estudiante con el uso del geoplano. Uso de la calculadora en la solución de problemas geométricos de cálculo y demostración.

Hacer conjeturas. Búsqueda y demostración de propiedades. Sistematización de las figuras geométricas elementales y sus propiedades. Igualdad por movimientos geométricos del plano (simetrías y traslaciones). Mover en una figura. Exploración de propiedades que se conservan cuando se producen movimientos en una figura. Propiedades básicas de las figuras elementales. Búsqueda de teoremas relacionados con la congruencia. Cálculo de perímetros, áreas y volúmenes. Búsqueda de propiedades asociadas a estos conceptos. Primeras ideas sobre semejanza de figuras. Continuación de la ampliación de las ideas sobre movilidad de las figuras para comprobar experimentalmente y formalmente, relaciones de congruencia y conservación de otras propiedades como la igualdad, el paralelismo y la perpendicularidad. Búsqueda de elementos simétricos en una figura y en un par de ellas.

Uso de las supercalculadoras por el docente como medio heurístico de apoyo en la exploración, comprensión y búsqueda de casos particulares y límites en la demostración de propiedades y por el estudiante para continuar el desarrollo de la habilidad “mover” en una figura y también como recurso para la búsqueda de propiedades y de ideas para su demostración y en la solución de problemas geométricos de demostración, de construcción y de cálculo. Búsqueda de figuras semejantes y de propiedades asociadas a esta relación.

En relación con la organización del contenido en esta última etapa, los autores referidos plantean que sería deseable que el contenido geométrico clásico que se ha trabajado desde los primeros grados, se sistematizará de una manera diferente para propiciar el proceso de búsqueda y evitar vuelva a trabajar de una manera clásica los contenidos. Los problemas que se escojan deben ser abiertos que permitan las búsquedas de los estudiantes y la obtención de múltiples propiedades de estas figuras que se sistematizarán en la medida que se obtienen.

Después de valorar esta propuesta podemos apreciar que ello implica una nueva manera de concebir el proceso de enseñanza-aprendizaje y de presentar la ejercitación, no como una forma acabada sino que esta posibilite la exploración, búsqueda, formación de conjeturas, pruebas, entre otros aspectos, de manera que se podrá desarrollar un pensamiento flexible, despertará el interés en los estudiantes por investigar, y obtener nuevas cosas para él y sus compañeros. Desde luego, algunas de estas ideas pueden ser introducidas en el referido proceso sin esperar que se realice desde instancias superiores una modificación del currículo, porque lo que sí es una realidad es que ya tenemos en nuestras manos la nueva tecnología y los modelos de enseñanza están caducando, ante esta realidad.

Algunos autores como Estrada y otros (2002) han propuesto y experimentado una serie de pasos para trabajar con el contenido de geometría a través del empleo de la computadora. A continuación, le facilitamos los mismos para que reflexionen al respecto entre ustedes de manera que vean la factibilidad de ser utilizados en la práctica, a partir de nuestra realidad.

Procedimientos para trabajar el contenido de Geometría, con el empleo de la computadora:

- Estudio y selección de los contenidos que emplearán con el auxilio de la computadora en su desarrollo.

Lo primero es hacer un estudio minucioso del programa, donde se analicen los objetivos propuestos para el grado, la unidad y las actividades docentes, debido a que se debe tener bien claro qué habilidades matemáticas deben desarrollarse con el programa. Luego se hará un análisis de los contenidos de Geometría que se impartirán y cuáles serán abordados en el programa de Geometría Dinámica, ya que hay que escoger los contenidos más eficientes para el aprendizaje de la Geometría con la computadora, o sea, no todos los contenidos objeto de estudio deben trabajarse por esa vía.

- Tener en cuenta las diferencias individuales de los estudiantes.

Es importante conocer la situación real de cada estudiante, por cuanto en función de ello se planificarán las actividades. Se pretende lograr una enseñanza diferenciada, de modo que se actúe no solo sobre los aspectos que no domina el estudiante, sino también sobre los aspectos que conoce y sobre el potencial de cada uno, es decir la Zona de desarrollo próximo.

- Tener presente las condiciones del laboratorio de computación.

Hay que considerar la cantidad de máquinas disponibles para el desarrollo de la actividad docente, ya que en dependencia de la cantidad de máquinas y de estudiantes se diseñarán las tareas para desarrollar la clase, aspecto este que tiene relación con lo referido a las diferencias individuales, ya que así serán distribuidos los estudiantes por máquinas.

- Planificar las diferentes tareas que resolverá el estudiante ante el computador, con el objetivo de que estas sean lo más eficiente posibles.

Luego de la selección de los contenidos que se abordarán habrá una planificación minuciosa de las tareas a realizar por el estudiante en el computador. Con estas tareas el estudiante obtendrá el conocimiento a través de la formación de conjeturas, que luego se demostrarán matemáticamente con los conocimientos que posee del curso desarrollado. También es en este momento donde se planificarán las actividades que debe realizar el profesor en el aula con los estudiantes, con el objetivo de trabajar sobre el potencial que cada uno tiene.

Se propone el siguiente plan para el trabajo en el aula:

ACCIONES DEL ESTUDIANTE	CONCEPTOS UTILIZADOS POSIBLES PREGUNTAS	SUGERENCIAS Y TAREAS

1. La primera columna contiene la “acción” a efectuar directamente con la barra de botones del sistema de Geometría.

2. La segunda columna especifica los conceptos involucrados y las implicaciones de las acciones anteriores. Forman el núcleo de la actividad y deben presentarse y discutirse hasta su completa asimilación. Esto es de gran importancia, por cuanto es precisamente esta presentación y discusión la que proporcionará la actividad directa por parte del estudiante y que, a su vez, posibilitará la asimilación de los conceptos y procedimientos que enumeran en esta columna.

3. La tercera columna contiene sugerencias didácticas, posibles exploraciones y actividades complementarias que se pueden realizar.

Por tanto, es importante llevar un registro individual donde se recojan los avances y dificultades de cada estudiante. Este punto resulta interesante, ya que el citado registro le facilitará al profesor un control más exacto del grupo, lo que propiciará planificar de una manera más eficiente las próximas actividades a desarrollar con el estudiante. Para este aspecto el profesor puede apoyarse en la opción “historial”, que tienen los programas de Geometría dinámica.

Además de la computación, la utilización del video y la TV también pueden ser útiles en las clases de Matemática. Concebir el planteo de problemas a partir de datos que se ofrezcan en algún documental vinculado con la economía, desarrollo social o político, la apreciación de las representaciones geométricas en la naturaleza, las obras de arte, la arquitectura u otras, la apreciación de documentales de la vida u obra de científicos e investigadores que realizaron aportes a esta u otra ciencia con el empleo de la modelación matemática, son aspectos que contribuirían a la motivación y el despertar del interés por el trabajo con las matemáticas, además de mostrar el origen objetivo del conocimiento matemático.

Algunas sugerencias sobre la evaluación en Matemática

Respecto a la evaluación en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es factible verla con una interrelación dialéctica entre la evaluación del proceso y la evaluación del resultado. En lo que, además de aportar datos cuantitativos obtenidos a través de instrumentos, el juicio de la evaluación se sostenga en el aporte de la valoración de estos datos y de la información que el docente obtiene sobre la adquisición y desarrollo del aprendizaje por parte de los estudiantes durante todo el proceso. Por tanto, evaluar es algo más que recoger datos, es además un juicio que se forma de manera continua y cualitativa.

La evaluación es un proceso que ayuda al profesor a comprender mejor lo que los estudiantes saben, a tomar decisiones docentes significativas y lograr una mejor adecuación a la realidad del alumnado. La atención se centra en lo que ocurre en el aula con la interacción de profesores y estudiantes. Por tanto, la evaluación actual propone cambios que sean más allá de una simple modificación de los exámenes.

A la hora de proceder a la concepción de la forma de evaluación de una unidad didáctica cualquiera, es necesario que el docente tenga presente que los instrumentos evaluativos deben capacitarlo para estudiar la forma que tienen los estudiantes de percibir ideas y procesos matemáticos y la capacidad que demuestran de funcionamiento en un contexto matemático. Al mismo tiempo, deben contribuir a que el profesor pueda identificar áreas concretas que resulten problemáticas o de potencialidades, con el objetivo de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Existen variadas formas de evaluación, así por ejemplo: preguntas de opción múltiple, de respuesta corta, de discusión o abiertas; entrevistas estructurales o libres; trabajos en casa; proyectos; diarios; ensayos; escenificaciones y exposiciones en clases. Entre estas técnicas las hay que son adecuadas para que los estudiantes trabajen de forma individual, en grupos reducidos o con el grupo de clase entero. El modo de evaluación puede ser escrito, oral o ante el ordenador.

No todos los estudiantes tienen la misma percepción ni las mismas características de pensamiento. Un método de evaluación que solo atienda un tipo de tarea o un modelo de respuesta no ofrece un indicador fiable de actuación, ni permite que cada estudiante demuestre su propia capacidad.

Por ejemplo, un examen de opción múltiple con limitación de tiempo que puntúe el reconocimiento rápido de la opción correcta puede perjudicar a los estudiantes más reflexivos, mientras que los problemas no estructurados pueden resultar difíciles a los estudiantes que hayan tenido poca experiencia con la exploración y la generación de ideas. Confiar exclusivamente en un solo tipo de evaluación puede ocasionar frustración en los estudiantes, disminuirles la confianza en sí mismos y causarle ansiedad e incluso rechazo a la matemática.

En ocasiones, una tarea de resolución de problemas que resulta apasionante para unos, supone para otros un ejercicio de memoria. Si se quiere que los estudiantes actúen a su nivel máximo de capacidad, la medida por la que se les va a valorar debe darles la oportunidad de hacerlo, y por tanto debe motivarlos. Se precisa de una evaluación que verifique no solo los conocimientos y procedimientos, sino además los modos de actuación, actitudes y valores. Se deben tener muy claro cuáles son los conceptos, procedimientos y actitudes que deben aprender los estudiantes; no se evalúan del mismo modo unos que otros.

Para planificar aprendizajes que sigan una secuencia, es preciso verificar lo que saben los estudiantes y la eficacia de las estrategias didácticas empleadas, a través de entrevistas, debates, tareas, pruebas. Si un concepto o una estrategia tiene alta prioridad en el descubrimiento de aprendizajes más avanzados, los estudiantes deben comprenderlo por completo antes de dar paso a un nuevo trabajo.

El control se fortalece mediante una valoración adecuada. Esta se realiza, ante todo, mediante el elogio, la crítica, pero también mediante la calificación. Para el éxito de la evaluación el estudiante debe reconocer por qué fue elogiado o criticado o el porqué de su calificación. El hecho de que el estudiante conozca los aspectos no logrados de su superación, para los nuevos aprendizajes, y que no resolverlos implica que presente dificultades en la asimilación del nuevo conocimiento, le permitirá trazar sus propias estrategias de solución. Asimismo, lograr que las ayudas que se le ofrecen tengan un mayor sentido para sí, además de hacerse consciente del estado del desarrollo de sus habilidades para fundamentar, para demostrar, para sintetizar. La primera batalla contra los bajos resultados se logra aquí.

Por supuesto que la efectividad de la evaluación depende, en gran medida, de considerarla una importante base para la planificación de la enseñanza de la Matemática y una condición previa para el trabajo individual de los estudiantes, al descubrirles sus dificultades y potencialidades y mostrarles la forma de aumentar sus esfuerzos.

En la propuesta, por tanto, se propone cambiar dialécticamente la evaluación como proceso y como resultado, la evaluación formal y la informal, la cualitativa y la cuantitativa.

Desde luego, todo esto le imprime al proceso evaluativo la necesidad de emplear diferentes estrategias como son:

- Establecer una comunicación asertiva con los estudiantes de manera que se posibilite el conocimiento entre los diferentes sujetos.

- No separar los momentos de evaluación de los de enseñanza-aprendizaje.

- Hacer énfasis, por diferentes vías, en aquellos aspectos que el estudiante debe descubrir o comprender.

- Dejarle claro al estudiante las actividades a ejecutar de manera independiente.

- Se sugiere que los estudiantes realicen por sí solos producciones de conocimientos (mapas conceptuales, resúmenes, gráficos) y permitan que el profesor se retroalimente constantemente de cómo marcha el aprendizaje del estudiante y al estudiante emplearse en su aprendizaje.

- Negociar de manera afable con los estudiantes para que estos se impliquen y acepten la evaluación como una necesidad de mejorar su aprendizaje.

- Necesidad de aplicar variadas formas e instrumentos para adquirir la información del proceso de aprendizaje y sobre todo, que la evaluación sea motivadora, de forma tal que hagan surgir tanto las potencialidades como limitaciones de los estudiantes.

La reflexión en la unidad didáctica debe llevar a decidir el qué, cómo y en qué momento evaluar y estas reflexiones contribuyen a la toma de decisiones para lograr un proceso evaluativo que arroje verdaderamente el estado del aprendizaje de los estudiantes. Para este último componente la propuesta se refiere a:

- Diseño y selección de tareas encausadas a valorar la comprensión y dominio alcanzados en conocimientos concretos.

- Diagnóstico y corrección de errores conceptuales, procedimentales y actitudinales.

- Cuestiones relevantes que controlar, detección de carencias en el uso de las representaciones y en las tareas de traducción.

- Tareas abiertas enfocadas a valorar la comprensión global y las estrategias de alto nivel.

- Sistemas para obtener información sobre el conocimiento adquirido por los estudiantes, seleccionarla y registrarla.

- Métodos adecuados para la valoración del aprendizaje alcanzado y de las actitudes desarrolladas por los estudiantes.

Debido a que una de las formas de plantear las evaluaciones es a través de ejercicios de selección múltiple, que con frecuencia es empleada para medir el aprendizaje de nuestros estudiantes en innumerables controles aplicados por las instancias superiores. Es conveniente que se realice un uso más sistemático, por parte de los docentes, de este tipo de evaluación, de manera que los estudiantes se preparen o entrenen para enfrentarse a las mismas.

Este tipo de evaluación tiene sus particularidades, por lo que a través de un ejemplo mostraremos el proceder para su confección, ya que la selección múltiple no puede llevar a plantear respuestas que no tengan una relación adecuada con la posible lógica de errores que los estudiantes pueden cometer en dependencia de sus creencias y que la admiten como válidos. De esta manera, se podrá precisar luego donde está el error y este pueda ser atendido hasta que se solvente (aquí está presente el denominado seguimiento al diagnóstico), no obstante somos del criterio que esta evaluación no puede concebirse de manera aislada sino que debe aparecer combinada con el intercambio conversacional con el estudiante para saber qué lo llevó a realizar esa selección y no otra.

Ejemplo:

Ante la pregunta o ejercicio siguiente:

1. El resultado de calcular $2^{(-3)}$ es:

a) ____ 0,002 b) ___ - 6 c) ____ - 8 d) ____ 0,125

¿Por qué se escogen estas opciones y no otras?

Cuando se plantea el inciso a) es porque los estudiantes que afirman que $2^{(-3)}=0.002$ aluden a lo que se conoce por deslizamiento de la memoria a aquellas respuestas que son ocasionadas por recordar equivocadamente las convenciones relativas a los exponentes negativos. En este caso, el recurso del estudiante es recordar las ocasiones de uso de este tipo de expresiones lo cual lo lleva a la notación científica de los números. Se destaca esta interpretación del exponente negativo, porque posee un elemento de coherencia relacionado con la semántica de los números negativos, ya que los estudiantes relacionan el exponente (-3) con el proceso de “mover la coma a la izquierda”.

Lo anterior está fuertemente relacionado con la estrategia que utilizan los estudiantes de asociar una transformación en el signo del exponente (asociada a la noción de negatividad).

Otras de las causas por la que escogen esta opción es que si reconocen que $2^{(-3)} = ½^3$, pero lo que no saben es convertir en expresión decimal la fracción $½^3$; como ese número es positivo y menor que uno, entonces tiene la forma 0,... y el exponente indica tres lugares después de la coma (0,002).

En el inciso b) se presenta una respuesta que se produce por lo que se conoce como persistencia de operaciones simples, que consiste en las respuestas que recurren a la suma, resta, multiplicación o división entre la base y el exponente. La noción de exponente es vista con frecuencia como la cantidad de veces que debe multiplicar la base, que la potenciación es un conjunto de operaciones de multiplicación "tantas veces como lo indica el exponente", ante la imposibilidad de utilizar este conocimiento en $2^{(-3)}$, se ven en la necesidad de buscar otro modelo, pero como hemos señalado, la noción ha sido presentada como cierto número de multiplicaciones, consecuentemente los estudiantes eligen la multiplicación y expresan que $2 \cdot (-3) = -6$.

Otra de las causas de que los estudiantes seleccionen esta opción (al igual que la tercera) es la creencia que poseen de que si la potencia de un número con exponente positivo es positiva, entonces la potencia de un número con exponente negativo es negativa.

Para el caso presentado en el inciso c) los argumentos para establecer tal igualdad son coherentes con la enseñanza de la noción del exponente natural y con una concepción del (- 3) como un número natural con un signo menos junto a él. De ahí que los estudiantes plantean que $2^{(-3)} = -8$ ya que $2^3 = 8$ y se le coloca el signo.

Otra de las causas por la que escogen esta opción es por lo que se conoce como persistencia del modelo de multiplicación reiterada, o sea, recurren al modelo $2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2$ (n veces). Los estudiantes asumen que cuando el exponente es negativo se puede interpretar a través del modelo de multiplicación reiterada. A ello se agrega la concepción que tienen de los enteros negativos como un número natural con un símbolo menos asociado. En este caso, ante la disyuntiva de no saber cómo multiplicar (– 3) veces la base 2 recurren a otro modelo y multiplican 3 veces la base (- 2). Entonces operan de la siguiente forma: $2^{(-3)}=-8$ ya que (-2) • (-2) • (-2) =-8.

Con respecto al inciso d) es la respuesta correcta y presupone que el estudiante además de conocer que una base elevada a un exponente negativo es equivalente a una fracción donde el numerador es la unidad y el denominador es la base elevada al valor absoluto del exponente inicial, realiza la conversión de esta fracción a expresión decimal, sin ninguna dificultad aparente.

Observen ustedes que incluso ante una respuesta incorrecta el error puede ser motivado por más de una razón. De ahí la necesidad de insistir con otra técnica para cerciorarse de cuál ha sido la verdadera causa del error y poder plantearse una estrategia adecuada para solucionar su falsa concepción.

De esta manera, es recomendable que cuando se elaboren estos tipos de evaluaciones se debatan en colectivo todos los posibles errores que pueden cometer los estudiantes y se seleccionen adecuadamente las opciones que se les plantearán de manera que facilite el diagnóstico profundo de cada estudiante, sin importar que el número de opciones exceda de cuatro, como clásicamente se plantea.

Capítulo 2 Bases teóricas para el desarrollo del pensamiento desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática

2.1 Interrelación entre la actividad y el desarrollo del pensamiento

El pensamiento es el "Producto superior de la materia dotada de una organización especial, el cerebro; proceso activo en que el mundo objetivo se refleja en conceptos, juicios, teorías, etc. El pensamiento surge en el proceso de actividad productiva social de los hombres y hace posible el reflejo mediato de la realidad, permite descubrir las conexiones sujetas a ley de la misma" (Rosental, 1981, p.12).

La aparición del pensar se halla vinculada al desarrollo social y la evolución biológica. El pensamiento es un producto bio-psico-social tanto por las particularidades de su origen, como por su manera de funcionar y por sus resultados. Ello se explica por el hecho de que existe solo en indisoluble unión con el trabajo y con el lenguaje, que se dan exclusivamente en la sociedad humana.

En la fase humana, la aparición del trabajo da origen al pensamiento verbal, específicamente humano, que se separa de la práctica en calidad de actividad teórica. Gracias al desarrollo del segundo sistema de señales, el pensamiento en su forma superior se traslada al plano interno de actividades. En tal caso, el objeto pueden constituirlo no las cosas reales, sino sus modelos psíquicos. Los resultados subjetivos de semejante pensamiento son modelos de la realidad estructurados con la participación del lenguaje. Se modelan no solo las relaciones entre sujeto y objeto, sino, además, las relaciones entre objetos diferentes.

Son propios del pensar, procesos como los de abstracción, análisis y síntesis, el planteamiento de determinados problemas y el encontrar los procedimientos de su resolución, la formulación de hipótesis, ideas. El proceso de pensar tiene siempre como resultado una idea determinada.

> La facultad que el pensamiento posee de reflejar de manera generalizada la realidad se traduce en la capacidad del hombre para formar conceptos generales. La elaboración de conceptos científicos se enlaza a menudo con la formulación de las correspondientes leyes. La facultad del pensamiento para reflejar de manera mediata la realidad se manifiesta en la capacidad del hombre para el razonamiento, la inferencia lógica y la demostración. Esta facultad amplía extraordinariamente las posibilidades del conocer; hace posible, partiendo del análisis de los hechos accesibles a la percepción inmediata, llegar a lo que no está al alcance de la percepción mediante los órganos de los sentidos. (Rosental, 1980, p.13).

Las teorías científicas generalizan la experiencia de la humanidad, forman una concentración de conocimientos del hombre y un punto de partida para la cognición ulterior de la realidad.

En la vida de cada ser humano, el pensamiento no existe como proceso puramente intelectual, sino que se halla indisolublemente vinculado a otros procesos psíquicos, o sea, no existe aislado de la conciencia del hombre.

> El pensamiento es el proceso de interacción entre el sujeto cognoscente y el objeto cognoscible; es la forma básica que regula la forma de orientarse el sujeto en la realidad. El pensamiento propiamente dicho es creador; surge en situaciones en que, para resolver los problemas, es indispensable adquirir nuevos conocimientos que permitan modificar las condiciones circundantes con el fin de satisfacer sus necesidades. Los productos del pensar constituyen modelos psíquicos de la realidad, modelos que figuran en el plano gnoseológico como imágenes de los objetos. (Rosental, 1980, p. 19).

Se reconoce por la dialéctica materialista la acción recíproca entre el hombre y el medio como un importante factor de desarrollo. La actividad que está indisolublemente vinculada con los conocimientos y la voluntad, se apoya en ellos, resulta imposible sin los procesos cognoscitivos y volitivos. Así la actividad es la actuación interna (psíquica) y externa (física) regulada por el individuo mediante un fin consciente, o sea, "…aquellos procesos mediante los cuales el individuo, respondiendo a sus necesidades, se relaciona con la realidad, adoptando determinada actitud hacia la misma" (González, 1995 p.34).

Toda actividad está dirigida hacia un objetivo determinado, del que se tiene determinada conciencia. El objetivo de la actividad es el resultado hacia el cual esta se dirige; el objetivo de la actividad de estudio de los escolares en su clase es adquirir los conocimientos que se le imparten.

Sin embargo, para el éxito de una actividad resulta de gran importancia que el individuo sienta el deseo, la aspiración de lograr el objetivo. La actividad está indisolublemente ligada a su motivo. Aunque el motivo puede quedar oculto o desconocido, no existe actividad inmotivada. Los motivos señalan el porqué se realiza la actividad, cuáles son las necesidades que satisface. “La forma en que el individuo realiza su actividad, e inclusive su actitud ante la tarea que esta implica, depende fundamentalmente de los motivos que le impulsan a actuar” (González, 1995, p.16).

El motivo que se encuentra en la base de una actividad puede ser un interés, un sentimiento, una necesidad, una convicción, puede tener carácter individual, respondiendo a necesidades e intereses personales, o puede tener un carácter social.

“Los motivos de la actividad humana están vinculados con sus fines y objetivos, en tanto que el motivo impulse la conducta hacia ese objetivo. Pero muchas veces el motivo se separa del objetivo y ya la realización de una actividad no encuentra su motivo en ella misma, sino en lograr la aprobación o el prestigio por su realización” (López, 1982, p. 33).

Así, el logro de un mismo objetivo, de obtener un mismo resultado, puede estar determinado en distintas personas por distintos motivos: el motivo del estudio en el escolar puede satisfacer una necesidad del propio sujeto de realizar esa actividad (estudiar porque le gusta), producir satisfacción a otras personas (complacer a sus padres), cumplir un deber social (todo pionero debe estudiar bien, esa es su responsabilidad), lograr una posición en el grupo de sus compañeros (el que estudia más es el mejor).

Por esenciales que sean los objetivos y motivos, no determinan por sí solos la actividad. La actividad transcurre a través de las acciones, que son los "… diferentes procesos subordinados a fines conscientes" (González, 1995, p. 25).

Uno de los componentes de toda acción son las operaciones, que las podemos considerar como las vías, procedimientos, métodos o formas mediante las cuales la acción transcurre en dependencia de las condiciones en que se debe alcanzar el objetivo o fin, o dicho de otro modo, "…son acciones más específicas que le dan a la acción esa forma de proceso continuo" (González, 1995, p. 26). De aquí que toda acción se pueda desmembrar en varias operaciones con determinada lógica y consecutividad. Por lo tanto, si la actividad existe a través de las acciones, estas, a su vez, se sustentan en las operaciones.

La enseñanza tiene como uno de sus objetivos la determinación del sistema de operaciones que el estudiante debe dominar y la instrumentación de los métodos adecuados para lograr su total asimilación.

En la estructuración de la actividad es necesario determinar las acciones y operaciones que esta incluirá, ya que la enseñanza debe ir dirigida a lograr la asimilación de esas acciones con una calidad determinada y a lograr que las mismas se interioricen, se conviertan en acciones internas del sujeto, en acciones psíquicas.

"La obtención de conocimientos se realiza en el proceso de la actividad del estudiante, a consecuencia y con la condición del cumplimiento por ellos de un determinado sistema de acciones" (Petrovski, 1985, p. 12)

El hombre no recibe de la naturaleza, de forma ya preparada, la actividad del pensamiento, sino que aprende a pensar, asimila las operaciones del pensamiento. El objetivo del pedagogo es dirigir hábilmente este proceso, controlar no solo los resultados de la actividad del pensamiento, sino también la marcha de su formación. La psiquis no es simplemente el cuadro del mundo, el sistema de imágenes, sino la actividad, el sistema de acciones y operaciones unidas por el motivo y el objetivo.

En los escolares el pensamiento se desarrolla fundamentalmente a través de la actividad de estudio. Por eso es indispensable elaborar el contenido de las disciplinas escolares en correspondencia con las particularidades y la estructura de la actividad de estudio. La enseñanza de tales asignaturas creará condiciones favorables para el despliegue de dicha actividad por parte de los estudiantes; la asimilación, por estos, del contenido de dichas disciplinas contribuirá a la formación de su pensamiento lógico.

El pensamiento es una premisa necesaria de cualquier otra actividad, debido a que esta es el resultado reelaborado de aquel. El pensamiento experimenta una compleja evolución, crea formas elementales derivadas de la actividad intelectual, procesos de percepción, de representación, hábitos de distintos géneros. A medida que estas formas se consolidan, el pensamiento se apoya en ellas para resolver nuevos problemas, más complejos.

La actividad del pensamiento está relacionada con la creación de una determinada imagen cognoscitiva. La existencia de esta imagen y sus peculiaridades destacan el pensamiento entre otros fenómenos de la realidad. La lógica al estudiar las formas del pensamiento, su estructura y función gnoseológica, ha determinado, como fundamentales, los siguientes: conceptos, juicios y razonamientos.

El concepto es la forma del pensamiento que refleja los indicios sustanciales de un objeto o una clase de objetos homogéneos. En el lenguaje, el concepto se expresa con palabras, grupos o combinaciones de palabras.

El juicio es la forma del pensamiento por la cual se afirma o se niega algo respecto a los objetos, sus indicios y relaciones. El juicio se expresa en forma de oración enunciativa.

“El razonamiento es la forma del pensamiento mediante la cual, partiendo de uno o varios juicios verdaderos, denominados premisas, llegamos a una conclusión conforme a ciertas reglas de inferencia” (Guetmanova, 1991, p. 45)

El razonamiento no puede existir sin conceptos ni juicios, lo mismo que el juicio sin conceptos ni razonamientos. El razonamiento está constituido por un sistema de juicios y la manifestación de cada juicio presupone un concepto.

Así pues, para la formación del razonamiento, para la obtención de conocimientos nuevos por mediación de razonamientos, se parte de juicios y conceptos ya formados. El juicio o el concepto obtenido por medio del razonamiento sirve de punto de partida para la formación de nuevos razonamientos que conducen a nuevos conocimientos” (Kopnin, 1983, p. 88).

Los conceptos, los juicios y los razonamientos cumplen diversas funciones en la trayectoria del pensamiento. El juicio sirve para establecer estrictamente un resultado determinado en la dinámica del pensamiento y el concepto resume todo cuanto se sabe del sujeto, reduciendo numerosos juicios a uno solo. En este sentido, el concepto viene a ser como una peculiar reducción de juicios, que conserva, al mismo tiempo, lo más esencial de su contenido; afianza lo ya conseguido y constituye un peldaño para la sucesiva trayectoria del pensamiento.

“La diferenciación del pensamiento en diversas formas significa, al mismo tiempo, su distanciamiento más definido de otros medios de actividad cognoscitiva humana. El pensamiento que no tiene formas, no se ha determinado todavía, no se ha diferenciado de la actividad laboriosa ni del conocimiento sensorial” (Kopnin, 1983, p. 89).

El proceso del pensar comienza siempre y cuando se separan algunos caracteres y propiedades de los objetos y fenómenos del mundo material, cuando se forman abstracciones, aunque sean elementales.

El razonamiento es la forma de mediatización de los juicios, el modo de conseguir nuevos conocimientos basados en juicios anteriormente establecidos. Con ayuda de los razonamientos se pasa de unos juicios a otros. En la construcción y el desarrollo de las teorías, el razonamiento argumenta los juicios y conceptos que los integran, constituye la vía por la cual se pasa de una teoría a otra más perfecta.

Este epígrafe sirve para esclarecer la interrelación dialéctica materialista que existe entre las formas del pensamiento: conceptos, juicios y razonamientos y aporta el vínculo entre el pensamiento y la actividad, esclarece el papel de la actividad en el desarrollo del pensamiento.

2.2 Bases lógicas del pensamiento del escolar

El vocablo lógica proviene del griego “logos” que significa idea, palabra, razón, razonamiento. Por lo que aquí, nos ocuparemos de problemas que desde hace siglos son objeto de investigación por parte de los científicos.

La lógica como ciencia existe desde hace más de 2000 años. Se tienen indicios de que ya en el siglo V a. n. e. los chinos, los hindúes y los hebreos se ocuparon de aspectos relacionados con ella, y en la antigua Grecia, Xenón, Sócrates y Platón hicieron grandes aportes a esta ciencia. Ahora bien, como el creador de la lógica se considera al filósofo griego Aristóteles (384-322 a.n.e.), quien compiló sistemáticamente los conceptos, sus relaciones mutuas, los juicios y conclusiones deducibles, y creó con los silogismos una clara estructura formal.

Así pues, consideramos la lógica como la ciencia que se ocupa del estudio del pensamiento desde el punto de vista de su corrección y el valor veritativo (ajuste a la realidad). En este sentido, es de gran importancia, por cuanto al ser el pensamiento reflejo mediato de la realidad, en muchas ocasiones es la corrección lógica el único criterio para juzgar la validez de un pensamiento.

Pueden establecerse divisiones en la lógica: formal, dialéctica, inductiva, simbólica. Nosotros no haremos estas divisiones, porque en la escuela se trata de formar integralmente un pensamiento adecuado y, para ello, hay que atender a todos los aspectos: forma, contenido, vías.

Para tener éxito, adquirir nuevos conocimientos y, de forma general, para aproximarse a la verdad, se necesita el conocimiento profundo de las leyes del pensamiento correcto. Solo entonces, cuando se logren aplicar conscientemente estas leyes, se podrán lograr resultados óptimos.

Una de las tareas que tradicionalmente se ha planteado a la enseñanza de la Matemática es la de contribuir al desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes, o sea, la enseñanza de la Matemática debe desarrollar la movilidad de los procesos lógicos del pensamiento, la comprensión de estructuras formales, el reconocimiento de la analogía y la diferenciación, la rápida generalización, la observación del proceso de reflexión y la abreviación de la resolución de problemas; en fin debe *racionalizar la actividad mental y práctica de los estudiantes*.

> En la frase pensamiento lógico se atribuye una cualidad (la de ser lógico) al pensamiento. Atendiendo al uso corriente del término lógico, podemos decir que lógico es sinónimo de natural o adecuado, pero también se utiliza el término lógico para calificar al pensamiento en el sentido de su validez y corrección, en ese caso se entiende como lógico el pensamiento que es correcto, es decir, el pensamiento que garantiza que el conocimiento mediato que proporciona se ajuste a lo real. Es en ese sentido que se pretende formar en los niños. (Campistrous, 1993, p. 23).

El pensamiento lógico no es congénito, se puede y debe desarrollar de diferentes modos. Entre los que se encuentra el estudio sistemático de la lógica.

En el uso común del lenguaje frecuentemente encontramos la frase “esto es lógico”, con lo cual se expresa que, por ejemplo, una afirmación es clara y consecuente y puede ser considerada como razonable. Por el contrario, cuando una asociación de ideas se nos manifiesta como algo sin sentido, o inconsecuente, la calificamos de ilógica, o sea, que no corresponde a la lógica. Naturalmente, que estas explicaciones dependen frecuentemente de los sentimientos y son deducidas de la experiencia sobre un concepto, por lo cual no bastan para cumplir las exigencias de un planteamiento científico. Sin embargo, a través de la relación con la vida diaria reconocemos la importancia que se le otorga a esta disciplina, así como al objeto de estudio de la lógica, que es el pensamiento, la forma superior de la actividad psíquica del hombre.

La resolución de problemas lógicos es un modo interesante para desarrollar el pensamiento. Raymond Smullyan, matemático estadounidense, compuso múltiples problemas de razonamiento lógico.

Raras veces, nos encontramos en los libros, con problemas que no dependan tanto del contenido y, por el contrario, dependan más del razonamiento lógico. No obstante a que es muy difícil establecer qué tipo de problemas son o no de razonamiento lógico, debido a que para resolver cualquier problema hay que razonar, a pesar de ello, existen algunos problemas en los que predomina el razonamiento, y es el contenido matemático que se necesita muy elemental. En la mayoría de los casos, con un conocimiento mínimo de Aritmética, de teoría de los números, de Geometría, es suficiente, si razonamos correctamente, para resolver estos problemas.

La práctica demuestra que el pensamiento lógico no se desarrolla automáticamente con la enseñanza de la Matemática, al menos en la medida que cabría esperarlo. Investigaciones realizadas han revelado las dificultades de los estudiantes en el trabajo con teoremas y sus demostraciones, en la resolución de problemas, en la interpretación de la información contenida en un texto, en el razonamiento deductivo en general (Acosta, 1995).

La acción del hombre se vale de procedimientos de actuación. Algunos son procedimientos específicos, válidos en un campo particular del conocimiento; otros son procedimientos generales válidos en cualquier campo del conocimiento, en tanto garantizan la corrección del pensar, estos son los procedimientos lógicos del pensamiento, que representan los elementos constituyentes del pensamiento lógico.

“Los procedimientos lógicos del pensamiento son aquellos procedimientos más generales, que se utilizan en cualquier contenido concreto del pensamiento, se asocian a las operaciones lógicas del pensamiento y que se rigen (cuando son adecuados) por las reglas y leyes de la lógica” (Durán, 1997).

De aquí se desprende la amplitud de su aplicación, por cuanto los procedimientos específicos solo se pueden utilizar en una esfera determinada, mientras que los procedimientos lógicos no dependen del contenido concreto, aunque en la actividad real del hombre, estos siempre se ejecutan con algún contenido específico.

A pesar de existir un estrecho nexo entre los procedimientos lógicos y específicos, ellos son relativamente independientes, lo que se puede expresar en la posibilidad que posee el individuo que domina el procedimiento, de aplicarlos a cualquier contenido específico.

Algunos autores (Talízina, 1985; Campistrous, 1993; Durán, 1997), plantean la contribución que el aprendizaje de los procedimientos lógicos puede hacer al desarrollo del pensamiento lógico. Reconocen la necesidad de incluir tales procedimientos en el contenido de la enseñanza. Estos procedimientos deben participar como objetos de asimilación especial para que en lo adelante sean utilizados consciente y voluntariamente en nuevas condiciones. En este libro se asume esta idea como un principio esencial.

La escuela debe ocuparse del desarrollo del pensamiento de los escolares, para eso es necesario lograr una enseñanza desarrolladora, que permita asimilar los procedimientos lógicos del pensamiento en la medida que se produce la apropiación de los conocimientos.

El dominio de los procedimientos generalizadores de la actividad cognoscitiva - según estos autores- no solo aumenta la calidad de la asimilación de los conocimientos, sino que además economiza el tiempo necesario para la enseñanza.

Las formas lógicas del pensamiento son los conceptos, juicios y razonamientos y a estas formas lógicas se le asocian procedimientos lógicos (Campistrous, 1993), entre estos tenemos:

- Procedimientos lógicos asociados a los conceptos:
- Reconocer propiedades.
- Distinguir propiedades.
- Identificar conceptos.
- Definir.
- Ejemplificar.
- Clasificar.
- Deducir propiedades.
- Procedimientos lógicos asociados a los juicios:
- Determinar valor de verdad.
- Transformar juicios.
- Modificar juicios.

- Procedimientos lógicos asociados a razonamientos:
- Realizar inferencias inmediatas.
- Deducir por separación.
- Refutar.
- Demostrar de manera directa.
- Demostrar de manera indirecta.
- Argumentar.
- Realizar inferencias silogísticas elementales.
- Realizar inferencias reductivas.

Analizaremos los razonamientos y algunos procedimientos lógicos asociados.

Una forma lógica fundamental para la adquisición de conocimientos es el razonamiento. La relación lógica que se establece entre las premisas y la conclusión, que constituye la estructura lógica del razonamiento, se conoce como regla de inferencia, en virtud de que a partir del conocimiento contenido en las premisas es posible inferir un nuevo conocimiento que es el contenido gnoseológico de la conclusión.

Aunque el proceso de inferencia que se realiza en todo razonamiento se efectúa sobre la base de la estructura lógica de las premisas y conclusión, sin atender a su contenido cognoscitivo. De hecho, el conocimiento contenido tanto en las premisas como en la conclusión quedan relacionados gracias al razonamiento, por lo que esta forma lógica está presente, como fundamento lógico, en diferentes operaciones lógicas, como son la definición y la demostración que permiten la sistematización del conocimiento en una nueva forma lógica, la teoría científica.

Además, el razonamiento posee un valor heurístico, o sea, constituye una vía para la obtención de nuevos conocimientos por lo que aparece también, como el fundamento lógico de todo método de obtención de conocimientos.

Es precisamente en este último sentido, en que nos interesa profundizar en el estudio del razonamiento, en tanto que al estar enfrascado en la tarea de la dirección y control del proceso de aprendizaje por parte de los estudiantes y al ser todo proceso de aprendizaje, de hecho, un proceso de adquisición de conocimientos, debemos seleccionar adecuadamente el método por medio del cual el estudiante se apropiará de ellos.

En todo método debe existir, al menos, un razonamiento en cuyas premisas quedará expresado el conocimiento que posee, en la conclusión encontraremos el nuevo conocimiento que no se poseía antes de ser obtenido por el razonamiento y que de ahora en adelante, formará parte del caudal de conocimientos y que puede ser utilizado como premisa de otros razonamientos para obtener nuevos conocimientos.

Al decir que las premisas contienen el conocimiento que se posee, se asegura que en ellas queda estructurado lógicamente en forma de proposiciones determinados conocimientos, o sea, informaciones que tenemos como verdaderas, pero ¿podemos asegurar lo mismo en relación con la conclusión?, ¿podemos garantizar que la conclusión contendrá una información verdadera siempre con solo garantizar la veracidad de la información contenida en las premisas?

Podemos constatar que, siendo las premisas verdaderas, la conclusión puede ser verdadera o falsa. El hecho de que las premisas sean consideradas como verdaderas se desprende de que en estas proposiciones queda expresado el conocimiento existente y en nuestro caudal de conocimientos se incluyen solo aquellas proposiciones que se tienen como verdaderas. Pero la conclusión que se obtiene contiene una nueva información que es necesario determinar si es verdadera o no, para en el caso de ser verdadera incluirla como un nuevo conocimiento.

Atendiendo a diferentes puntos de vista se pueden clasificar los razonamientos como sigue.

Según Guetmanova (1991), la explicación de que la conclusión puede ser verdadera o falsa aunque las premisas sean verdaderas, las debemos encontrar en las reglas de inferencia que se aplican en cada caso, con lo cual podemos diferenciar tres tipos de razonamientos:

1. Razonamiento necesario. De premisas verdaderas se obtiene una conclusión verdadera siempre.

2. Razonamiento imposible. De premisas verdaderas se obtiene una conclusión falsa.

3. Razonamiento probable. De premisas verdaderas se obtiene una premisa que puede ser verdadera o falsa.

Al ser la conclusión de los razonamientos necesarios siempre verdadera, nos garantiza el incluirlo como un nuevo conocimiento, por lo que siempre que sea posible trataremos de recurrir a esta forma.

Una distinción más conocida entre los tipos de razonamientos (Guetmanova, 1991), se realiza sobre la base de la comparación del grado de generalidad entre las premisas y la conclusión:

1. Razonamiento deductivo. La conclusión aporta un conocimiento menos general que al menos una de las premisas.

2. Razonamiento inductivo. La conclusión es más general que al menos una de las premisas.

3. Razonamiento analógico. La conclusión posee el mismo nivel de generalidad que las premisas, o sea, a partir del conocimiento de que un objeto posee una determinada propiedad se infiere que otro debe poseer esa propiedad en virtud de que ambos objetos son análogos con respecto a otras propiedades.

La obtención de un conocimiento es deductiva si todo razonamiento que aparezca en él es deductivo. Veamos un ejemplo de un razonamiento:

Ejemplo 1:

Todos los rombos son paralelogramos

El cuadrado es un rombo

El cuadrado es un paralelogramo

La estructura de todo razonamiento incluye las premisas (sobre la raya), la conclusión (debajo de la raya) y el nexo lógico entre aquellas y esta.

Un caso importante de razonamiento es la deducción, en la cual se garantiza que la conclusión es verdadera cuando las premisas de partida lo son. En otras palabras, la deducción es el razonamiento que garantiza pasar de juicios verdaderos a otros también verdaderos. Nosotros centraremos la atención en estos razonamientos deductivos.

Dado que en la deducción se pasa de juicios verdaderos a otros juicios también verdaderos, se comprende que el paso de unos a otros debe hacerse de acuerdo con las reglas estrictas que garanticen la veracidad. Estas son las reglas de inferencias deductivas y el proceso de pasar de unos juicios a otros se llama inferencia.

Analizaremos algunas reglas de inferencia fundamentales, que tienen una relación directa con los procedimientos lógicos del pensamiento que es necesario formar en la escuela.

Es bueno destacar que existen varias reglas de inferencia, las cuales se clasifican atendiendo a si se pueden hacer con el uso de una o varias premisas en:

a) Inmediatas, que son las que parten de un solo juicio o premisa (ver cuadro lógico en lógica y procedimientos lógicos del aprendizaje de Campistrous.

b) Mediatas, tienen más de una premisa (ver silogismo en Lógica de Guetmanova).

En el presente libro solamente analizaremos tres reglas de inferencias. Estas son:

a) Contraposición $p \Rightarrow q \vdash \sim q \Rightarrow \sim p$

b) Separación $(p \Rightarrow q) \wedge p \vdash q$

c) Suspensión $(p \Rightarrow q) \wedge \sim q \vdash \sim p$

Analizaremos la regla de inferencia inmediata que en algunos textos se denomina contraposición simple: $p \Rightarrow q \vdash \sim q \Rightarrow \sim p$ (p implica q, se deduce no que q implica p) y está asociada a la implicación del Álgebra de la lógica $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ la cual se puede comprobar que es una tautología (siempre es verdadera).

Ejemplo 2:

Cuando se clasifican los triángulos y se estudian las propiedades que cumplen los equiláteros se puede deducir lo siguiente.

Si ABC es un triángulo equilátero (p) entonces ABC es un triángulo equiángulo (q).

Si el triángulo ABC no es equiángulo (~q) entonces tampoco es equilátero (~p).

A pesar de no ser común que se trabaje con el contrarrecíproco de un teorema, es posible que el profesor utilice esta regla de inferencia para contribuir al desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes de este nivel de enseñanza y particularmente, con los de séptimo grado.

Es bueno destacar que aquí se puede realizar una doble implicación, o sea, una equivalencia $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ que también es una tautología la cual tiene mucha aplicación en la Matemática, ya que la determinación de un teorema y su contrarrecíproco permite demostrar el primero, sustituirlo por el segundo y demostrarlo.

Ejemplo 3:

En el texto de séptimo grado aparece el teorema que plantea:

Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente iguales (p), entonces estos triángulos son iguales (q).

El cual lo podemos sustituir por su contrarrecíproco que sería:

Si dos triángulos no son iguales (~q), entonces sus tres lados no son respectivamente iguales (~p).

Otra regla de inferencia es la regla de separación:

$p \wedge p \Rightarrow q \vdash q$ (de p y de p implica q se deduce q). En este caso, la implicación asociada $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$, la cual es una tautología, o sea, es una implicación lógicamente verdadera, lo que permite afirmar que su tesis (q) se deduce lógicamente de la premisa $p \wedge (p \Rightarrow q)$. Esta regla de inferencia se conoce en la lógica aristotélica como "modus ponendo ponens" (modo de afirmar afirmando) en tanto se afirma la conclusión al afirmar la premisa.

<u>Ejemplo 4:</u>

En la clasificación de los triángulos según sus lados se puede utilizar la regla cuando ellos conocen que todo triángulo equilátero es isósceles.

O sea, el triángulo ABC es equilátero y como todo triángulo equilátero es isósceles, entonces puedo afirmar que el triángulo ABC es isósceles.

Todo triángulo equilátero (p) es isósceles (q).

El triángulo ABC es equilátero (p).

El triángulo ABC es isósceles.

<u>Ejemplo 5:</u>

Los estudiantes conocen de sexto grado que: Los ángulos opuestos por el vértice son iguales. En séptimo grado, se repasan las relaciones entre ángulos, por lo que se le puede proponer el siguiente ejemplo.

Si se les afirmara que □ y ß son dos ángulos opuestos por el vértice ¿cómo son □ y ß?

El razonamiento asociado es:

□ y ß son opuestos por el vértice (p) entonces □ = ß (q).

□ y ß son opuestos por el vértice (p).

□ y ß son iguales (q).

Otra regla de inferencia de uso es: $(p \Rightarrow q) \wedge \sim q \vdash \sim p$ (de (p implica q) y no q se deduce no p) y la implicación asociada $(p \Rightarrow q) \wedge \sim q \Leftrightarrow \sim p$, que es también lógicamente verdadera y estamos en presencia de otra regla de inferencia que está asociada con el procedimiento lógico de refutación.

Esta regla se llama en la lógica aristotélica “modus tollendo tollens” (modo de negar negando) ya que se niega la premisa al negar la tesis.

<u>Ejemplo 6:</u>

Los estudiantes conocen mediante el teorema del libro de texto de séptimo grado que una propiedad de los rombos es que sus diagonales se cortan perpendicularmente, luego podemos plantearles que si el cuadrilátero ABCD no tiene sus diagonales perpendiculares, entonces este cuadrilátero no es un rombo.

Si un cuadrilátero es un rombo (p) entonces tiene sus diagonales perpendiculares (q).

El cuadrilátero ABCD no tiene las diagonales perpendiculares (~q).

El cuadrilátero ABCD no es un rombo. (~p)

En este epígrafe, se ha realizado una valoración sobre la evolución histórica del surgimiento de la Lógica. Se explica cómo esta contribuye positivamente al desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes, se hace una valoración de los procedimientos lógicos, los razonamientos y los procesos lógicos asociados a los razonamientos; y específicamente los deductivos por la importancia que ellos poseen desde el punto de vista de la obtención de nuevos conocimientos. Se analizan algunos ejercicios como ejemplos en los que, aunque los estudiantes no conozcan la lógica como tal, sí deben estar familiarizados con esta a través de actividades que contribuyan al desarrollo del pensamiento.

2.3 El papel de los ejercicios en la enseñanza de la Matemática

El proceso de enseñanza-aprendizaje debe dirigirse de modo que los estudiantes sean entes activos en la asimilación de los conocimientos y el desarrollo de las habilidades y capacidades, se enfrenten a contradicciones que deben ser resueltas a través de su aprendizaje. Son precisamente estas contradicciones, que surgen en el desarrollo de dicho proceso, las que se erigen en fuerza impulsora del desarrollo de los estudiantes para lograr conocimientos cualitativamente superiores.

La enseñanza de la Matemática en la escuela debe tener la tarea de contribuir a la preparación de los jóvenes para la vida. Debe desarrollar el pensamiento de los estudiantes y contribuir a que estos realicen operaciones mentales tales como: analizar y sintetizar, comparar y clasificar, generalizar y concretar, abstraer y particularizar. Estas operaciones deben estar presentes, tanto en el trabajo en la nueva materia como en la resolución de ejercicios y problemas.

El pensamiento marcha estrechamente vinculado al desarrollo del lenguaje, por ello, en la enseñanza de la Matemática la contribución a la formación lingüística de los estudiantes es un componente de los objetivos en el campo del desarrollo intelectual. Se contribuye a la formación lingüística de los estudiantes cuando se les capacita para el uso correcto del lenguaje de la asignatura, para transferir formulaciones del lenguaje común al de la Matemática y viceversa.

Mediante la enseñanza de la Matemática se aspira a que los estudiantes desarrollen generalizaciones relativamente rápidas, mediante conocimientos de analogías y diferencias. Hay que educarlos en la movilidad de procesos del pensamiento, o sea, el paso fácil y libre de una a otra operación mental cualitativamente diferente a la reversibilidad del curso de las ideas. Para este fin, es importante que se le propongan ejercicios en los que se intercambien los elementos dados y los que deben hallarse.

Definición del concepto ejercicio

Existen diferentes criterios del concepto de ejercicio. La mayoría de los autores lo definen como una exigencia para la realización de acciones, solución de situaciones, deducción de relaciones, cálculo (Muller, 1980; Zillmer, 1987; Jungk, 1989). Según Santiesteban y Velázquez (2011, p. 1)

> El ejercicio es una unidad cognitiva, comunicativa o física de un tipo de actividad dirigido a que el sujeto cognoscente desarrolle diferentes hábitos y habilidades en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Es la realización concreta del contenido y objetivo de la enseñanza. Constituyen métodos estructurales

que reflejan un sistema metodológico concreto como: objetivo, principios, métodos; organizan no solo los materiales didácticos, sino también las acciones y operaciones ejecutoras del sujeto cognoscente que le permiten la apropiación del contenido y el logro de los objetivos.

Por tanto, el ejercicio en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática constituye una exigencia para actuar, que se caracteriza por:

1. El objetivo de las acciones.

2. El contenido de las acciones.

3. Las condiciones de las acciones.

<u>El objetivo de las acciones:</u> En la resolución de un ejercicio es, en cada caso transformar, una situación inicial (elementos dados, premisas) en una situación final (elementos que se buscan, tesis).

<u>El contenido de las acciones:</u> En la resolución de un ejercicio, está caracterizado por:

a) El objeto de las acciones: los elementos de la materia matemática (conceptos, proposiciones y procedimientos algorítmicos); la correspondencia entre situaciones extra matemáticas y elementos de materia matemática; y los procedimientos heurísticos (principios, estrategias, reglas), así como medios heurísticos auxiliares.

b) Los tipos de acciones: identificar, realizar, comparar, ordenar, clasificar, reconocer, describir, aplicar, fundamentar, buscar, planificar, controlar.

Las condiciones de las acciones: Se encuentran en primer lugar las exigencias que el ejercicio plantea al estudiante, expresada por el grado de dificultad de este.

Clasificaciones de los ejercicios

Según Zillmer (1987), los ejercicios que existen en la enseñanza de la Matemática se pueden clasificar de acuerdo con:

• El contenido del ejercicio.

• La presentación del ejercicio, en forma de un texto o no.

El contenido del ejercicio

a) Ejercicios no matemáticos o ejercicios de aplicación (el problema no es de un tipo matemático y se resuelve con medios matemáticos).

b) Ejercicios matemáticos (el problema matemático se resuelve con medios matemáticos).

La presentación del ejercicio, en forma de un texto o no

a) Ejercicios formales.

b) Ejercicios con textos.

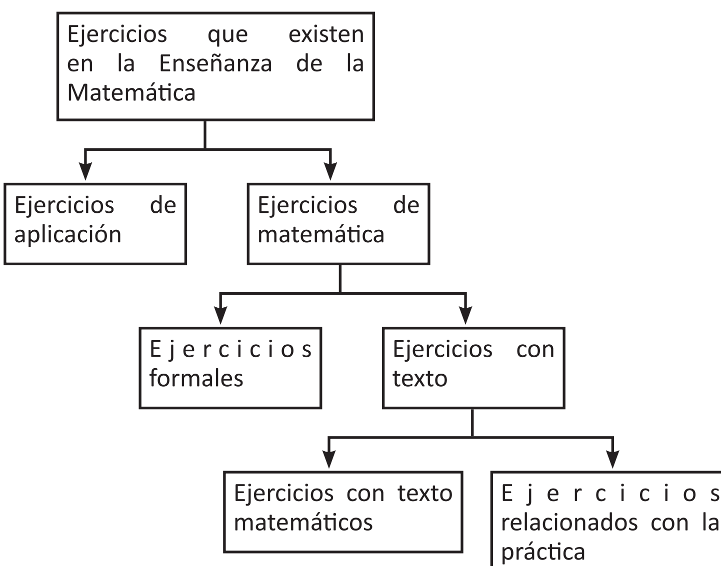
Ejercicios formales: el contenido matemático se pide mediante una palabra.

Ejercicios con textos: el contenido matemático aparece en frases. Este tipo de ejercicios se puede clasificar en:

a) Ejercicios con textos matemáticos.

b) Ejercicios relacionados con la práctica.

Podemos resumir estas clasificaciones de los ejercicios en el siguiente esquema:



En todo ejercicio se diferencian tres componentes fundamentales:

a) Los elementos dados (datos, premisas, condiciones existentes).

b) La vía de solución.

c) Los elementos buscados (incógnitas, respuestas a preguntas, figuras geométricas, fórmulas o relaciones).

Atendiendo a si son o no conocidos estos componentes los ejercicios se pueden clasificar, como (Muller, 1980):

No.	Ejercicios	Elementos dados	Vías de solución	Elementos buscados
1	Ejercicios completamente resueltos	Conocido	Conocido	Conocido
2	Ejercicio de determinación de carácter algorítmico o de cálculo	Conocido (datos)	Conocido (algoritmo)	Desconocido (solución)
3	Problemas de aplicación. Demostración	Conocido (datos) (premisa)	Desconocido	Conocido (incógnita) (tesis)
4	Problemas de determinación o deducción	Conocido (Premisa)	Desconocido	Desconocido (Tesis)
5	Ejercicios inversos del tipo 2	Desconocido	Conocido	Conocido
6	Ejercicios para formar un ejercicio	Desconocido	Conocido	Desconocido
7	Inverso del tipo 4 o relacionado con el trabajo hacia atrás	Desconocido	Desconocido	Conocido
8	Situación problémica	Desconocido	Desconocido	Desconocido

En la tabla aparecen clasificados de todos los tipos de ejercicios que se pueden encontrar en la enseñanza de la Matemática, desde uno completamente resuelto, en el que son conocidos sus elementos, hasta una situación problémica en la que son desconocidos los elementos dados, buscados y la vía de solución. Además, quedan incluidos los que exigen formar ejercicios que son de gran importancia y utilidad sobre todo para que el profesor pueda crear nuevas situaciones a través de actividades conscientes y desarrolladoras que permitan preparar a los estudiantes para la vida y contribuir al desarrollo del pensamiento lógico.

En el proceso de resolución de ejercicios el estudiante debe estar motivado en dependencia de sus necesidades, y dirigidos a un fin u objetivo consciente. Por esto, consideramos este proceso como una actividad.

En la actividad del proceso de resolución de ejercicios se realizan determinadas acciones con los procedimientos lógicos asociados a los razonamientos, los cuales nos permiten desarrollar el pensamiento lógico.

La actividad desempeña un papel importante en la apropiación de conocimientos. El trabajo independiente es la forma de actividad que prevalece en los ejercicios prácticos y problemas. Se trata de ejercicios y tareas para la aplicación de conocimientos.

Algunas consideraciones sobre la selección de los ejercicios o sistemas de ejercicios

Es necesario que los profesores, al seleccionar o elaborar los ejercicios que van a plantear a sus estudiantes, tengan en cuenta no solo la clasificación de estos, sino que también deben analizar su nivel de complejidad y dificultad, así como la actividad mental que deben desarrollar los estudiantes en el proceso de solución.

De la efectividad en la utilización de los ejercicios en la enseñanza de la Matemática depende, en gran medida, el grado de preparación de los estudiantes para la actividad práctica en cualquier esfera de la vida social. Al resolver ejercicios matemáticos estructurados en un sistema bien elaborado, podemos lograr una buena preparación matemática en los estudiantes, que implica el desarrollo del pensamiento matemático.

La ejercitación hace un gran aporte al cumplimiento de los objetivos de la enseñanza de la Matemática; pero para lograr cada uno de ellos en particular, es necesario un sistema de ejercicios bien determinados y respectivamente, una metodología específica para su resolución. Por esto, cada uno debe estar dirigido a la realización de objetivos concretos.

Los ejercicios dependen del contenido y, como ya planteamos, se deben integrar al momento de la clase que convenga, de acuerdo con su tipo, o constituir tarea para la casa. Si esto se realiza sistemáticamente, se podrá comprobar que, si bien al principio pueden surgir dificultades, estas se eliminarán en la medida en que el estudiante resuelva las actividades, puesto que ha ganado habilidades y razonamientos; aprende a pensar y a reflexionar.

En la selección de los ejercicios que se va a plantear a los estudiantes, el profesor debe tener en cuenta además:

- Las habilidades o hábitos fundamentales a desarrollar (de cálculo, construcción, demostración, investigación), de acuerdo con objetivos concretos de la enseñanza.

En la práctica escolar se plantea un gran número de ejercicios tipos que se resuelven a través de un algoritmo, pero este no es solo el objetivo fundamental. Hay que tener en cuenta los aspectos educativos y de desarrollo del pensamiento que pueden lograrse en el proceso de solución.

- La actividad mental que deben desarrollar los estudiantes en el proceso de solución.

Respecto a la actividad mental a desarrollar por los estudiantes deben considerarse:

El contenido de las acciones, caracterizado por:

- El objeto de las acciones o los elementos de la materia Matemática, o sea, conceptos, proposiciones (teoremas y procedimientos). Cada elemento de materia requiere de consideraciones específicas para el desarrollo de una adecuada ejercitación.

- Los tipos de acciones a desarrollar por los estudiantes. Aquí se considera la identificación y realización de entes matemáticos como acciones fundamentales: comparar, ordenar, clasificar, reconocer, describir, fundamentar, por su importancia especial en el desarrollo del pensamiento y, calcular, simplificar, descomponer en factores, resolver ecuaciones, como acciones específicas básicas de la Matemática escolar.

- Las condiciones para las acciones, que están dadas por las exigencias que el ejercicio plantea a la actividad mental de los estudiantes para su solución.

En el análisis de este aspecto hay que tener en cuenta además:

- El grado de dificultad.

- El grado de complejidad.

- El grado de actualización.

El grado de dificultad está en relación directa con el planteamiento, a los estudiantes, de ejercicios en que se presentan todas las dificultades posibles en atención al nivel de profundidad exigido en los objetivos de la enseñanza. También indagar la presentación, siempre que sea posible, de ejercicios con una, ninguna o más de una solución.

La graduación de las dificultades de los ejercicios debe hacerse de modo que se comience con los más sencillos. Hay que garantizar el éxito de todos los estudiantes, así se les estimula a trabajar. Los ejercicios con la mayor dificultad deben poder ser resueltos por los estudiantes de rendimiento promedio y con mayor capacidad. Sobre esta base, es posible seleccionar un sistema extenso de tipos de ejercicios con respecto a sus exigencias y al trabajo mental.

Tipos de procedimientos de solución

La resolución de ejercicios y problemas es la vía fundamental para realizar la enseñanza y el estudio de la Matemática y es por eso que los profesores deben saber cuál es la forma más efectiva de utilizarlos de manera que puedan aprovechar al máximo todas las posibilidades que ellos brindan.

Los procedimientos de resolución de ejercicios y problemas se pueden clasificar en dos grandes clases:

- Algorítmicos: en los que si para una determinada clase de ejercicios se conoce un algoritmo de solución, entonces todo ejercicio de esta clase se puede resolver con seguridad, en la misma forma, mediante la aplicación de dicho algoritmo.

- Heurísticos: en los cuales si para un ejercicio no se dispone de ningún algoritmo de solución, porque no existe o no se conoce, entonces primero hay que determinar una vía de solución apropiada, para lo cual puede ser útil tener en cuenta los procedimientos heurísticos que permiten realizar un trabajo sistemático orientado hacia este objetivo, pero sin que sea posible asegurar que de ese modo se encuentre una vía de solución.

En algunos programas de Matemática se establecen con precisión los procedimientos algorítmicos que los estudiantes deben conocer y aplicar, sin embargo, no siempre ocurre así con los procedimientos heurísticos, aunque estos forman parte de la materia de enseñanza y desempeñan un papel importante para encontrar ideas de solución a ejercicios y problemas particulares y también a nuevos algoritmos de solución. Por lo que, es necesario que los estudiantes se familiaricen con estos procedimientos y se capaciten para aplicarlos, es por ello que realizaremos un breve resumen sobre los procedimientos heurísticos.

La instrucción heurística es la enseñanza consciente y planificada de reglas generales y especiales de la heurística para la solución de ejercicios y problemas. El empleo de la instrucción heurística en la clase de Matemática contribuye a lograr: la independencia cognoscitiva de los estudiantes; la integración de los nuevos conocimientos, con los ya asimilados; el desarrollo de operaciones intelectuales, de formas de trabajo y de pensamiento fundamentales de la ciencia matemática; la formación de capacidades mentales.

En forma general, algunos autores abogan por la instrucción heurística (Torres, 1994; Acosta, 1995), aunque no se debe tratar toda la heurística, sino hacer una selección de los procedimientos heurísticos esenciales que son necesarios en cada grado. Torres (1994) en su tesis determina una serie de procedimientos esenciales a partir de su experiencia de más de 10 años y de un criterio propio. Asumimos la posición de Acosta (1995), que alude a que para hacer la selección es necesario determinar cuáles deben ser los esenciales en cada grado/año, estos deben ser analizados por cada profesor a partir de un diagnóstico, para determinar el estado real de su grupo, y el análisis de los objetivos y contenidos que debe desarrollar en el grado.

El objetivo principal de la heurística es investigar las reglas y métodos que conducen a los descubrimientos e invenciones, que incluye la elaboración de principios, reglas, estrategias y programas que facilitan la búsqueda de vías de solución a tareas de carácter no algorítmico de cualquier tipo y de cualquier dominio científico o práctico. Los elementos heurísticos se clasifican en: procedimientos heurísticos y medios auxiliares heurísticos.

Los procedimientos heurísticos apoyan la realización consciente de actividades mentales complejas y exigentes. Estos procedimientos se dividen en: principios, reglas y estrategias.

Los medios auxiliares heurísticos más importantes son: figuras ilustrativas, esbozos o figuras de análisis, tablas.

Por la diversidad de bibliografía que trata sobre la heurística solo nos referiremos al programa heurístico general, por la gran importancia que este reviste tanto para el estudiante como para el profesor. Este programa se utiliza para la planificación y dirección de los procesos de resolución de problemas. Constituye para el profesor el instrumento universal de dirección y para el estudiante una base de orientación para el trabajo con problemas (Ballester, 1992).

PROGRAMA HEURÍSTICO GENERAL

FASES FUNDAMENTALES	TAREAS PRINCIPALES
-Orientación hacia el problema.	- Comprensión del problema.
- Trabajo en el problema.	- Búsqueda de la idea de la solución.
	• Reflexión sobre los medios.
	• Reflexión sobre la vía.
• Solución del problema.	- Ejecución del plan de solución.
• Evaluación de la solución y de la vía.	- Comprobación de la solución.
	- Reflexión sobre los métodos aplicados.

<u>Orientación hacia el problema:</u>

A esta fase pertenece la búsqueda del problema y la motivación; el planteamiento del problema y su comprensión.

El proceso de solución de los problemas comienza con la creación de una motivación. Ella no resulta necesaria para cada tipo de problema independiente, también es razonable una motivación para tratar grupos de ejercicios de un dominio determinado. Debe considerarse que además, ciertos motivos para la solución pueden estar en el propio ejercicio, de aquí la necesidad de seleccionar también problemas del campo motivacional del estudiante.

La motivación puede estar vinculada a las potencialidades del problema para contribuir al desarrollo intelectual o a la educación de los estudiantes, la exigencia de razonamiento y formas peculiares del pensamiento, la tendencia al falso razonamiento, los nexos de formulación del problema con diferentes esferas de la vida social.

El planteamiento del problema puede hacerse de las siguientes formas:

a) Encontrar el problema relacionado con la determinación de ciertas cantidades de magnitudes en el transcurso de una discusión con el estudiante. En este caso, se plantea una situación inicial a los estudiantes, con su ayuda se completan los datos y luego colaboran en la formulación y solución del problema, de manera activa. El profesor puede auxiliarse en ejercicios que se encuentran construidos en el libro de texto.

b) Plantear una situación problémica que conlleve al planteamiento del ejercicio.

c) Plantear directamente el ejercicio.

Para lograr la comprensión del problema, los estudiantes deben realizar una lectura cuidadosa de este. Con frecuencia resulta recomendable formular el texto con sus propias palabras, observar figuras, tablas o esquemas dados en el problema, o elaborarlos si fuera necesario; interpretar palabras claves o buscar la aclaración de términos desconocidos.

Para lograr la comprensión del problema, el profesor puede realizar las siguientes acciones: leer el problema detenidamente, preguntar de qué trata, formular el texto con sus propias palabras.

En esta primera fase podemos utilizar procedimientos heurísticos como el principio de analogía, para algunas motivaciones y el arreglo heurístico, interpretar el problema, para lograr su comprensión.

Trabajo en el problema:

A esta fase corresponden: la precisión del problema, su análisis y la búsqueda de la idea de solución.

La precisión y el análisis del problema están dados por la comprensión de la estructura del ejercicio, lo cual equivale a determinar adecuadamente los datos dados y buscados. Comprende la formulación matemática, o sea, la formulación precisa del problema y mediante la continuación del análisis se arriba así a una comprensión más profunda del problema en cuestión. De aquí que especialmente en los ejercicios con texto no exista un límite estricto entre las fases parciales, comprensión del ejercicio y análisis y precisión.

Para la comprensión más profunda del texto el estudiante puede auxiliarse de medios heurísticos auxiliares como: esbozo gráfico de la situación, confección de tablas y formulación ventajosa del texto.

El análisis del ejercicio crea las condiciones previas esenciales para la búsqueda de la idea de solución, en el cual se aprecian dos momentos, dedicados a:

a) La reflexión sobre los métodos, donde se determina la vía principal de solución a través del establecimiento de relaciones entre los datos y las incógnitas, este es generalmente el planteamiento de una ecuación o la aplicación de una fórmula y la introducción en caso necesario de magnitudes auxiliares.

b) La elaboración de un plan de solución, donde están presentes las determinaciones de los medios matemáticos concretos y la aplicación de las estrategias de trabajo.

En los ejercicios que se resuelven con la aplicación de fórmulas se encuentra señalada al menos una de las necesarias, mediante los conceptos o palabras claves que aparecen en el texto del problema.

Es conveniente señalar también que un buen número de problemas se pueden resolver por reflexiones lógicas y el cálculo aritmético, por lo que no existe la necesidad de plantear una ecuación o aplicar una fórmula.

A partir de nuestras consideraciones, en esta fase podemos concluir que el proceso de búsqueda de la idea de solución termina con la modelación matemática; esto es: cuando se han encontrado las fórmulas, ecuaciones e inecuaciones suficientes para la determinación de las magnitudes que se buscan o para su representación en forma de términos o expresiones algebraicas con las variables que designan los datos.

Solución del problema

Esta fase incluye: la realización del plan de solución y la representación de la solución.

En la realización del plan de solución están presentes: la determinación del orden de realización de los cálculos, el análisis de realización del cálculo aproximado, el análisis de las unidades de medidas, la utilización de magnitudes auxiliares. Hay que tener en cuenta las reglas para el cálculo aproximado y las cifras esenciales que se utilizan en la escuela.

Al igual que en las fases anteriores están aquí presentes también los procedimientos heurísticos, que penetran fundamentalmente, las llamadas reglas heurísticas generales.

Evaluación de la solución y de la vía

Uno de los aspectos a tener presente en esta etapa es la comprobación del problema, la cual debe realizarse de acuerdo con las relaciones que se establecen en el enunciado del ejercicio, o mediante la comparación de la posible solución con la estimación, el cálculo aproximado y la práctica si es conveniente.

No solo se evalúa la solución, sino también la vía de solución. Aquí se hacen consideraciones retrospectivas, en las que se retoman los procedimientos y métodos utilizados para el plan de solución. Con ello se amplían los conocimientos de los estudiantes sobre métodos, recursos heurísticos, así como formas de trabajo y de pensamiento (ganancia metodológica) que posibilitan un trabajo independiente exitoso, en problemas posteriores.

Se reflexiona sobre la existencia de otras vías de solución y la posibilidad de utilizar la vía de solución seguida en problemas semejantes, pueden además valorarse las condiciones del problema con la misma modelación, aspectos que constituyen consideraciones perspectivas.

CAPÍTULO 3 Influencia de la matemática en el desarrollo del pensamiento reflexivo

3.1 El pensamiento reflexivo y su relación con la enseñanza de la Matemática

Para individualizar las habilidades cognitivas específicas o básicas, en las que se articulan los procesos del pensamiento, el psicólogo italiano Santo Di Nuovo, basado en los resultados de sus estudios y de otros psicólogos cognitivistas, comparte sustancialmente las fases o áreas y las funciones del pensamiento o actividades intelectuales tal como han sido planteadas por García Hoz al final de su estudio experimental sobre los términos del vocabulario científico común.

Por ello, podemos afirmar que en la propuesta psicopedagógica de las etapas del pensar, las funciones intelectuales y las habilidades básicas referidas a las diversas funciones, existe una relación dialéctica entre la pedagogía, tratada por García Hoz y la psicología abordada por Di Nuovo. Además, es significativo acentuar que las fases o áreas del pensamiento constituyen una sucesión temporal. En el caso específico, la memoria no viene después de la percepción y de la elaboración de los estímulos, sino que es una función que comienza a actuar en el momento mismo en el que se inicia el proceso de aprendizaje. Por todo lo anterior, es necesario aludir las fases del pensamiento.

La fase perceptiva del pensamiento

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática empieza con la función receptiva, cuyas actividades intelectuales básicas son la observación, la audición y la lectura. Se caracteriza porque el estudiante se muestra dispuesto a recibir los primeros estímulos para su aprendizaje y de hecho interactúa con los diferentes estímulos que llegan del mundo exterior a partir del propio proceso de enseñanza-aprendizaje y de la influencia del profesor.

Las funciones de esta fase se agrupan en dos categorías: una referente a la preparación de las recepciones de los estímulos y la otra referente a la verdadera y propia percepción. Ellas le permiten al organismo interactuar adecuadamente con los múltiples estímulos que provienen del ya citado proceso de forma organizada, en la que sus aspectos parciales y globales sean asimilados de forma significativa, y dejando "al fondo" los no pertinentes o perturbadores. Como funciones específicas se distinguen las siguientes: atención, interés, motivación, observación como percepción visual, escucha como percepción auditiva, percepción táctil, gustativa y olfativa, lectura, identificación, puntualizaciones con cálculos y medidas. De ahí la necesidad de emplear medios de enseñanza en el referido proceso de enseñanza-aprendizaje.

En este sentido, es notorio destacar que la percepción indirecta de la realidad externa le llega al aprendiz a través de la lectura y la escucha. Leer es un medio efectivo para lograr el desarrollo intelectual, social, espiritual y moral del hombre. Por tanto, la lectura reviste una alta significación y constituye un elemento esencial en la formación integral de las nuevas generaciones. En la esfera intelectual, la referida actividad verbal ayuda a fomentar patrones de raciocinio. Es un estímulo para el desarrollo del pensamiento y sirve de modelo a la actividad intelectual.

En la esfera educativa, la lectura constituye uno de los medios de aprendizaje más eficaces. Ella no solo le facilita al discente su formación técnica o profesional, sino que el uso sistemático de los diferentes textos fomenta en el lector hábitos de estudio independiente que le servirán para ampliar cada vez más el cúmulo de conocimientos. Por cuanto, desde el punto de vista del contenido, la ya citada actividad verbal permite al lector el contacto con el conocimiento de la cultura humana en toda su amplitud y profundidad. De igual modo, contribuye a desarrollar habilidades de expresión oral y escrita, que permiten hacer un uso de la lengua cada vez más correcto, culto y expresivo.

Desde el punto de vista psicológico, la lectura es una actividad valiosa, por medio de la cual no solo se alcanzan momentos de recreación, sino que ayuda a ampliar los límites de la experiencia. La lectura incita a analizar el comportamiento humano, a valorar las actitudes positivas o negativas; contribuye a crear patrones de conducta más elevados y con ello, la formación de convicciones necesarias.

Sin embargo, la lectura tiende a ser un término ambiguo; ya que generalmente, se asocia a texto, o a la acción de leer o, incluso, al método empleado en la enseñanza de la lengua. Esto hace necesaria la precisión de este concepto. Por cuanto, como actividad verbal puede ser considerada como método o como fin, o sea habilidad en sí misma, para la decodificación o redecodificación de significados. Sin embargo, no sería lógico confundirla con el término texto, como suele ocurrir actualmente.

En este mismo sentido, este término en ocasiones se utiliza para referirse al análisis, otras al abordar a la interpretación de un determinado texto, otras cuando se refiere a selecciones de lecturas, en vez de expresarse como selección de textos o de fragmentos de estos.

Por todo lo expuesto anteriormente, se define *leer* como aquella formación psicológica individual que transcurre a través de un proceso interno de carácter dinámico-participativo. Dicha formación le permite al sujeto cognoscente entender, comprender e/o interpretar un texto escrito en un sistema lingüístico común entre el emisor y receptor; lo que lo conlleva a reestructurar o formar nuevos esquemas a partir del tránsito de la información de un plano interpsicológico a uno intrapsicológico. Mientras que la lectura es la actividad verbal resultante de esta acción.

Por tanto, la lectura es la base del estudio y la clave está en leer bien para estudiar mejor. Sin embargo, algunos estudiantes confunden saber leer con la aptitud para reconocer signos gráficos y transformarlos en acústicos con cierta facilidad y ritmo; y esto no es saber leer. Además, no hay una práctica constante de lectura de estudio. Aunque sabemos que la capacidad de leer mejora a medida que la persona aumenta sus conocimientos, es igualmente tarea de los profesores, en los distintos años de la educación escolar y universitaria, favorecer este proceso de mejora con estrategias de velocidad y decodificación lectora, con ejercicios adecuados que habitúen al aprendiz a leer cada vez mejor y más rápido, retener lo que han leído, relacionarlo con los conocimientos previos y ordenar situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática.

La escucha de las explicaciones del profesor, o mejor, la interacción verbal profesor-estudiante no es un hecho puramente cognitivo porque está unido al tipo de relación entre el profesor y los estudiantes. En este sentido, en cada explicación oral, y su correspondiente escucha, intervienen elementos no cognitivos. Frente a esta realidad, debería ser aspiración de todo docente que sus estudiantes no se limitasen a escuchar, sino que hiciesen preguntas cada vez más frecuentes y tengan una participación activa en las clases, a través del diálogo.

Por tanto, es importante que el estudiante analice lo que realizó, cómo lo hizo, en qué se equivocó, cómo se pueden eliminar los errores, defender sus criterios en el colectivo, reafirmarlos o modificarlos, con lo que enriquecen sus conocimientos y potencializan su zona de desarrollo próximo, a la vez que se autocontrola, valora sus resultados, posibilidades y comportamiento y lo regula, todo lo que sería más efectivo si también se evalúan los resultados del trabajo colectivo y el proceso de socialización. Para ello, el profesor debe promover una comunicación dinámica, dialogante, horizontal y democrática.

Fase reflexiva del pensamiento

Está formada por el conjunto de las actividades intelectuales mediante las cuales la persona analiza los datos recibidos por los estímulos y los relaciona entre sí y con sus conocimientos previos. En esta fase se produce el complejo proceso de formación de los conceptos. Justamente es la reflexión la que califica como humano al aprendizaje al sacarle del reduccionismo conductista del estímulo-respuesta, porque la respuesta del ser humano al estímulo externo no es automática sino basada en la actividad reflexiva. Por tanto, es menester un nuevo modelo de aprendizaje que se expresa como: Motivación-Elaboración- Expresión-Retroalimentación-Motivación. Todas las funciones del área reflexiva se pueden agrupar en dos grandes categorías: el análisis de cada uno de los elementos del conocimiento y su integración.

El área reflexiva consta de las siguientes funciones específicas: análisis, integración de datos y formación de conceptos que comprende: comparación por semejanza y diferencia, ordenación, clasificación, inferencia, síntesis, valoración e interpretación crítica de conceptos, resolución de problemas.

Mediante las funciones del área reflexiva, el estudiante actúa cognitivamente sobre los estímulos y sobre los datos de su experiencia. De esta manera los analiza, los modifica y estructura en forma lógica para un mejor entendimiento y para que puedan ser utilizados colectivamente para la resolución de problemas, en el caso particular de este texto matemático.

El análisis consiste en la descomposición del mensaje en sus elementos a fin de considerarlos uno por uno. Se realiza para separar las diferentes clases de ideas contenidas en un determinado tema y así distinguir lo esencial de lo secundario, y lo secundario de lo accesorio. También para diferenciar los hechos de las hipótesis. La función de análisis constituye el paso y la unión entre las fases perceptiva y reflexiva del proceso de aprendizaje. Los profesores, como mediadores, deben promover la formación del pensamiento analítico en sus estudiantes a través de una permanente ejercitación en el aula.

La síntesis es la actividad cognitiva tendente a recomponer e integrar los conocimientos a través de una estructura lógica de ideas, con la aplicación de un pensamiento sintético. Además, las habilidades que hay que promover y sostener para desarrollar en los estudiantes el pensamiento crítico son: saber captar la coherencia lógica de un razonamiento; saber captar las distintas posiciones; saber ver las consecuencias de determinadas premisas; saber sustentar las propias afirmaciones. También se deben tener en cuenta las habilidades útiles para proceder de manera eficiente en la resolución de los problemas: el pensamiento alternativo, el pensamiento estratégico y el pensamiento causal. La capacidad de resolución de problemas, representa la función puente entre el área reflexiva y la creativa.

Una vez aludidas las funciones del área reflexiva es importante profundizar en la esencia del pensamiento reflexivo. Dewey (1989, p. 21) entiende por pensamiento reflexivo: "…el tipo de pensamiento que consiste en darle vueltas a un tema en la cabeza y tomárselo en serio con todas sus consecuencias", o sea, Dewey (1989, p. 25) "…el examen activo, persistente y cuidadoso de toda creencia o supuesta forma de conocimiento a la luz de los fundamentos que la sostienen y las conclusiones a las que tiende". Esta definición del concepto reflexión ha de ser una condición básica para entender la profesión docente en una educación inclusiva como una práctica profesional habitual.

Más adelante, Dewey (1989, p. 102) conceptualiza al pensamiento reflexivo como: a) un estado de duda, de vacilación, de perplejidad que origina el pensamiento; y, b) un acto de búsqueda, de caza, de investigación, para encontrar algún material que esclarezca esa duda, que disipe la perplejidad. La construcción de un proceso de reflexión conducente a la construcción del conocimiento, desde esta óptica, implica el desarrollo de una serie de fases, establecidas entre dos límites: 1) una etapa pre-reflexiva, en la que se plantea el problema que hay que resolver y de la que surge la pregunta que la reflexión ha de responder; y, 2) una situación final, en la que la duda se ha resuelto y "… de la que se deriva la experiencia directa de dominio, satisfacción y goce", o etapa post-reflexiva. Las fases a las que nos referimos son las comprendidas entre ambos extremos y que, de modo esquemático, son las siguientes:

1. Sugerencias, en las que la mente salta hacia adelante en busca de una posible solución, en las que se establece la ocurrencia de una dificultad sentida.

2. Definición de la dificultad en términos de enunciado de un problema, entendido como la cualidad emocional que nos predispone a interrogar la práctica y que nos orienta a la acción (buscar una respuesta).

3. El uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis para iniciar y guiar la observación y otras operaciones de recogida de material objetivo, o lo que es lo mismo, ocurrencia de una explicación sugerida o solución posible.

4. La elaboración mental de la idea, o razonamiento en el sentido estricto del término.

5. Comprobación de hipótesis mediante la acción real o imaginada.

Para que tu pensamiento siga un proceso eficiente, lógico e inteligente, conviene que tengas presente los siguientes principios del pensamiento reflexivo. Los mismos constituyen directrices mediante las cuales la inteligencia actúa sobre la experiencia, con un propósito consciente:

- Principio de la concatenación de las ideas. Aquí se dan dos procesos básicos del pensamiento: continuar y reflexionar. El primero implica pasar de una idea a otra, sea esta cual fuere. El segundo significa haber comenzado con dos ideas separadas e intentar descubrir el modo de vincularlas entre sí.

Por tanto, las ideas y los conceptos, cuando son correctos, se constituyen en la organización de la experiencia. Sin embargo, a menudo las ideas y los conceptos se alejan de la realidad, porque hay una tendencia del espíritu humano a creer antes de saber.

- Principio de la decodificación de los sistemas de la lengua. El mismo transcurre a través del proceso por el cual transformamos una situación desconocida en una situación conocida, para saber cómo reaccionar ante ella.

- Principio del cuestionamiento. Este abarca dos dimensiones: preguntas para analizar la acción y preguntas para encarar un problema. La primera incluye interrogantes como: ¿Por qué hacemos esto?, ¿realmente necesitamos hacerlo? y si es así, ¿cómo podemos hacerlo mejor? La segunda abarca cuestionamientos como: ¿Cuál es el problema?, ¿cuáles son las causas?, ¿cuáles son las posibles soluciones? y ¿cuál es la mejor solución?

- Principio de la exploración consciente del contexto. La pura velocidad conduce a conclusiones rápidas, al partir de datos muchas veces incompletos. La mente más lenta procesa más datos, explora más caminos, advierte cosas distintas y llega a conclusiones mejores.

La mayoría de las veces pensamos demasiado rápido. Incluso en los incendios, la mayor parte de las muertes se produce por el pánico. Lentitud no es torpeza. Si sustituimos “lento” por “pausado” o “exploratorio” advertimos los beneficios de pensar a una velocidad menor. Al pensar más despacio se enfoca cada detalle con más nitidez, como en un viaje.

 Principio de la comprobación. *Te dirán que trates de probar que estás en lo cierto. Yo te digo que trates de probar que estás equivocado*, era el gran consejo que daba el ilustre científico francés Louis Pasteur, en este sentido. Buscar la prueba del error es lo que más garantiza la posibilidad de llegar a la certeza. Practicar, antes de dar algo por cierto, numerosas verificaciones y renovadas pruebas.

 Principio de la integración de elementos. Piensa: *¿Cómo podré mejorar?* (Sumas valor). Piensa: *¿Cómo podré hacer más?* (Sumas cantidad). Aprende: sumas hechos. No podrás construir nada, a menos que tengas los materiales. De la nada, no podrás construir nada. Por tanto, los pensamientos *generalizadores* advierten aspectos comunes, mientras que los analizadores separan las cosas con distinción de sus diferencias.

El análisis, además, busca los hechos que están detrás de los hechos. Su importancia estriba en que es muy necesario realizar un buen análisis antes de actuar. Hay que diagnosticar correctamente antes de prescribir un curso de acción a seguir.

Por tanto, el pensamiento reflexivo se caracteriza por la *curiosidad*, la *sugerencia* y el *orden*. Las mismas constituyen tres peculiaridades del referido pensamiento, indispensables para que exista un proceso de enseñanza-aprendizaje adecuado. La *curiosidad*, innata en los seres humanos, no es algo que pueda enseñarse, pero su desarrollo depende de la forma en que es presentada la información a quien deseamos que aprenda, al abrir la posibilidad de encontrar soluciones por uno mismo. La sugerencia, o sea, todas las ideas, los métodos, las estrategias, las experiencias. Todo debe ser considerado sugerencia en la medida que "invite" a desarrollar en el futuro maestro la posibilidad de encontrar por sí mismo respuestas a las interrogantes de su pensamiento reflexivo, en relación con la enseñanza y su profesión.

Por último, el *orden*, en el que el pensamiento reflexivo implica secuencialidad, continuidad y ordenamiento de las sugerencias. Estas tres condiciones constituyen el objeto de la reflexión, el que se desarrolla en tres niveles fundamentales.

El primer nivel de reflexión es el de racionalidad técnica. La preocupación dominante tiene que ver con la aplicación eficiente y eficaz del conocimiento educativo, para alcanzar unos fines dados. En este nivel ni los fines ni los contextos institucionales de aula, escuela, comunidad y sociedad se tratan como problemáticos" (Van Manen en Zeichner y Liston).

Una visión similar de este nivel es presentado algunos años después (Schön, en Cornejo) y se agregaba para este nivel la formación inicial y continua para los profesores. En este tipo de prácticas, el "dispositivo" implicaba a los profesores, someterse a experiencias estructuradas en laboratorios, luego de las cuales se evaluaba y discutía la actividad. La reflexión está hecha sobre la base de los logros de los aprendices respecto de los objetivos de la clase. En definitiva se provee, a través de esta racionalidad, un ejercicio de información necesario para pulir sus destrezas en desarrollo. La preocupación dominante tiene que ver con la aplicación eficiente y eficaz del conocimiento educativo para unos fines determinados (Van Manen en Zeichner y Liston).

El segundo nivel de reflexión es el de racionalidad práctica (Van Manen en Zeichner y Liston) "… este nivel se basa en una concepción de la acción práctica por la cual el problema reside en explicar y clarificar las suposiciones y predisposiciones que subyacen en los asuntos prácticos y juzgar las consecuencias educativas que conlleva una acción" (Van Manen en Zeichner y Liston). Un docente con estas características es quien puede pensar mientras actúa. De esta manera puede responder a las situaciones que enfrenta sin importar la incertidumbre que estas situaciones impliquen, con originalidad y ponderando la conflictividad de las mismas (Schön, en Cornejo). Se considera que toda acción va unida a unos compromisos de valor particular y que el que realiza la acción considera el valor de fines educativos rivales (Van Manen en Zeichner y Liston).

El tercer nivel de reflexión lo constituye el de racionalidad crítica. Este nivel implica a los dos anteriores y además, "…incorpora criterios morales y éticos dentro del discurso sobre la acción práctica. En este nivel, las preguntas centrales cuestionan qué objetivos educativos, experiencias y actividades conducen a formas de vida incluidas por el interés a la justicia, la equidad y si las disposiciones actuales satisfacen estas necesidades y propósitos especiales" (Van Manen en Zeichner y Liston).

En este punto de la reflexión, se deben alcanzar cuestiones morales y éticas, indagar y reflexionar acerca de valores como la justicia, la equidad. Cuestionar lo ya determinado o establecido. Este nivel implica una necesaria reflexión acerca del "deber ser" y no la aceptación de las situaciones "como ellas son". (Van Manen en Zeichner y Liston).

Finalmente no podemos dejar de lado que para que todo esto pueda ponerse en práctica necesita de unas actitudes propias que faciliten este proceso reflexivo (Dewey, 1989, pp. 43-44)

a) Apertura de pensamiento: "…un deseo activo de escuchar a más de una opinión, de analizar los datos con independencia de la fuente, de prestar atención, sin remilgos, a las posibilidades alternativas, de reconocer la posibilidad de error incluso en nuestras creencias más arraigadas".

b) Responsabilidad: "Ser intelectualmente responsable quiere decir considerar las consecuencias de un paso proyectado; significa tener la voluntad de adoptar esas consecuencias cuando se desprendan razonablemente de cualquier posición asumida previamente. La responsabilidad intelectual asegura la integridad, esto es, la coherencia y la armonía en las creencias".

c) Entusiasmo: "…el auténtico entusiasmo es una actitud que opera como una fuerza intelectual. Un maestro capaz de despertar ese entusiasmo en sus estudiantes hace algo que no puede lograr ningún tratado metodológico".

Sin embargo, es necesario acotar que el prejuicio y las creencias son los peores enemigos del pensamiento. El pensamiento necesita información, y la información necesita del pensamiento objetivo y neutral. Un proceso muy habitual, en nuestra mente, es utilizar el pensamiento para apoyar una opinión previamente formada. Pero el proceso correcto es usar el pensamiento para explorar una cuestión, no para apoyar un prejuicio. Por eso es imprescindible permanecer alerta, observar posibles obstinaciones o partidos tomados, que bloquean la claridad y la comprensión.

Fase creativa del pensamiento

Según García Hoz (1981, pp. 27-28), la creatividad es "…una actividad tan compleja que resulta muy difícil encerrarla en una definición. Sin embargo podemos asumir como idea universalmente compartida el hecho de que la creatividad no es un don poseído por pocos, sino una propiedad que todos los hombres poseen en mayor o menor grado". Por tanto, se debe cultivar en todos los estudiantes, desde el comienzo de su escolarización.

En esta fase se pone en evidencia el hecho de que el soporte cognoscitivo del estudiante se amplía también en virtud de los estímulos internos del estudiante mismo. Su centro está en la función creativa en sentido estricto, mientras que las distintas funciones están unidas de manera tangencial. Se caracteriza porque los conocimientos adquiridos se transforman en elementos activos para nuevos aprendizajes que surgen como resultado de la autoestimulación del aprendiz que se manifiesta en cuatro actividades fundamentales: la extrapolación, la analogación, la imaginación fantástica y la creatividad.

La extrapolación, como función, hace de puente entre la fase reflexiva y la creativa y consiste en la extensión de las tendencias más allá de la información recibida, con el propósito de extraer las consecuencias, los efectos, las implicancias y los corolarios, haciendo uso del pensamiento secuencial. En el proceso de analogar la persona emplea el pensamiento analógico para realizar analogías. Se concibe la analogía como el proceso mental mediante el que se extienden las conclusiones a las que se ha llegado al final de una actividad de aprendizaje a situaciones muy similares a aquellas en las que se ha desarrollado la actividad misma.

La imaginación fantástica es una facultad que facilita la producción y registro de imágenes mentales (representaciones visuales, auditivas, olfativas o cinestésicas), que derivan del interior de la persona y son percibidas como tales. Por otra parte, la creatividad o capacidad de crear, permite encontrar relaciones y soluciones novedosas a partir de esquemas mentales e informaciones ya conocidas, mediante un pensamiento divergente. Por último, las habilidades específicas en que se manifiesta la creatividad son: la fluidez ideática o simbológica, la flexibilidad intelectual, y la originalidad.

A través de estas funciones específicas, el aprendiz es capaz de construir configuraciones nuevas y originales de estímulos y de apoyarse en ellas para emprender próximas actividades: la experiencia del aprendiz se extiende y enriquece por las construcciones personales.

Fase retentiva del pensamiento

Esta fase tiene que ver con la memorización, con el uso de la memoria de manera inteligente. Según García (1997, pp. 258-259)

> Algo se debe también decir respecto de la memoria. Mirando con un poco de humor las modas pedagógicas, la memoria se nos parece como un elemento fundamental en toda la historia de la educación, hasta que en el siglo XX hubo algo así como un ataque general contra la memoria. De ser objeto de universal aprecio –en los medios populares se decía "tiene buena memoria" como expresión equivalente a tener inteligencia- pasó a ser despreciada como "la inteligencia de los tontos. Lo peor que se podía decir de un método de enseñanza es que era "memorista". (…) Porque lo que acontece en este combate, en pro y en contra de la memoria, es que se fundamenta en un lamentable error, el confundir la memoria con el memorismo, es decir, el uso razonable de una facultad humana con su concepto reduccionista y abuso de tal facultad. Sin memoria no hay posibilidad de vida humana, pero la memoria sólo no es equivalente a pensamiento.

El concepto de memoria hace referencia a la capacidad de la mente humana de mantener información de diversos tipos cuando los estímulos ya no están presentes, ya sea durante períodos breves de tiempo o durante toda la vida de los organismos. El concepto de memoria está estrechamente relacionado con el de aprendizaje, ya que el aprendizaje empieza por ser una función receptiva, cuyo material se debe fijar en la mente del aprendiz y que la forma que tenemos para comprobar lo que se aprende es mediante el recuerdo.

La fase retentiva se caracteriza porque el aprendiz adquiere un nuevo conocimiento, lo fija y lo incorpora a su patrimonio cognoscitivo de donde lo podrá sacar posteriormente, siempre que tenga necesidad. Esta área del pensamiento se basa en la capacidad de memoria, entendida en la doble aceptación de fijación de los conocimientos y de recuerdo de los mismos en momentos posteriores. Pero, lo cierto es que la memoria acompaña todas las fases de pensamiento en el proceso de aprendizaje, bien sea memorístico o repetitivo o bien sea significativo. Las funciones mentales del área retentiva, a través de la fijación y el recuerdo, sirven para almacenar múltiples estímulos recibidos del ambiente exterior, o producidos por el mismo sujeto, de manera que puedan ser utilizables en sucesivas situaciones u ocasiones. De esta forma, se integran en la experiencia del aprendiz nuevos conocimientos y competencias.

Favorecer la fijación y el recuerdo de lo aprendido, requiere ejercitar adecuadamente la tendencia del estudiante a servirse preferentemente de la memoria icónica (se refiere al significado de las figuras) o de la memoria semántica (se refiere al significado de las palabras). Orientar el inteligente uso de la memoria es una de las tareas básicas en el aprendizaje escolar, tanto la memoria inmediata o a corto plazo, y la memoria mediata o a largo plazo. La actuación de los profesores para ayudar a los estudiantes a que hagan uso eficaz de la memoria, a través de recursos mnemotécnicos (cadena de imágenes mentales, clasificación y asociación de ideas, uso de acrósticos), es fundamental en la tarea de enseñar a pensar y educar la inteligencia de los aprendices, a lo largo de la vida escolar y universitaria.

Fase expresiva del pensamiento

Un proceso de aprendizaje provechoso debe desembocar siempre en actividades externas, mediante las cuales la persona se mejora a sí misma y a los demás. En esta fase se realiza la manifestación externa del proceso cognitivo, a través de la expresión verbal y la expresión no verbal o práctica.

La fase expresiva verbal se trata de la forma expresiva más simple, que puede ser de tipo oral o escrito y que indica la primera reacción que se manifiesta en el exterior después de haber adquirido un aprendizaje. Constituye la manifestación externa del resultado de un proceso cognoscitivo y es la expresión humana por excelencia, la comunicación a través del lenguaje verbal.

Los profesores que se proponen estimular el desarrollo de las capacidades expresivo- verbales, orales o escritas, deben considerar que, en primer lugar, se necesita la adquisición de las competencias gramaticales, sintácticas y semánticas, habilidades necesarias tanto para la expresión oral como para la escrita. Para que los aprendices se adueñen de las habilidades básicas de la expresión oral, en un inicio aprenderán a usar adecuadamente la respiración diafragmática para emitir correctamente los sonidos que componen las palabras. Luego, se deben formar habilidades más complejas, como la fluidez verbal (el vocabulario y la expresión adecuada) y el uso de paralingüismos (el tono de la voz y el ritmo del mensaje oral).

La expresión escrita a través de la redacción y composición, con una correcta estructura de frases, oraciones y la construcción de cada párrafo, requiere de un dominio de la gramática, la sintaxis y la semántica. Además, se debe cultivar inicialmente en los estudiantes: la motricidad fina, la lateralización y la rapidez coordinación ojo-mano, para entrenarlos a que usen eficientemente la expresión verbal- escrita.

Mediante las funciones específicas del área expresiva verbal (expresión oral y expresión escrita) un aprendiz puede codificar y transmitir a otras personas mensajes verbales relativos a las propias percepciones, a los propios pensamientos y a los propios estados afectivos.

La fase expresiva práctica o no verbal podría llamarse aplicativa, porque en ella el conocimiento se une con la actividad externa o material del individuo, bien de tipo técnico y artístico, bien de tipo ético. Se caracteriza porque los conocimientos y las habilidades mentales adquiridas, en la vida del aprendiz, se constituyen en elementos no solo del conocer sino también del hacer.

Las funciones o actividades intelectuales que corresponden a esta fase son: la expresión corporal, la motricidad y la expresión artística, a través de la expresión plástico-pictórica y la expresión musical.

En relación a la expresión corporal

> …se puede considerar como la función de unión entre las expresiones verbales y no verbales, porque el conjunto de las habilidades que la forman (el dominio de la mirada, de la mímica facial, de los gestos, de la postura y de la proxémica, la capacidad de una adecuada autopresentación de la propia personalidad a través del cuerpo, son habilidades básicas estrechamente relacionadas con la expresión verbal de tipo oral que enriquecen y concretan el significado de la comunicación oral. Por otro lado, la mirada, la mímica facial, los gestos, la postura, etc., transmiten de por sí mensajes simbólicos incluso sin necesidad de la expresión oral; a este respecto habría que reservar una importancia particular en la escuela, más allá de la dramatización, (…) a la danza, al mimo y a determinados ejercicios gimnásticos que permiten expresar las ideas

> a través de los movimientos del propio cuerpo. Habría que formular objetivos específicos para permitir a todos los estudiantes adueñarse de las citadas habilidades. (Zanniello, 1995, p. 167)

En relación a la motricidad -capacidad de los músculos para excitarse y contraerse bajo la acción de determinados estímulos al recibir un impulso nervioso que transmite una orden de movimiento- encierra una serie de habilidades como la lateralización, la motricidad ocular, el equilibrio estático y el equilibrio dinámico, la motricidad fina, la articulación y coordinación de los músculos, el ritmo motriz, la fuerza en el movimiento y la resistencia en el esfuerzo motriz. Dichas habilidades se deben adquirir a través de las actividades lúdicas. Así, el juego tiene una gran importancia en la manera de adquirir y afianzar los conocimientos. Es el gran medio de aprender por medio de la experiencia.

Por otro lado, hay que tener en cuenta que el desarrollo motor o motriz: andar, correr, saltar, trepar, gatear, manipular objetos, danzar, ayuda al niño a controlar su cuerpo, a moverse con seguridad y soltura, a introducir ejercicios o actividades más complejas cada vez con el fin de estimular el crecimiento y desarrollarse de forma coherente, ordenada y armónica. De esta forma, los niños además de conocerse pueden utilizar su cuerpo como medio de expresión (danzas, dramatizaciones).

En la educación escolarizada, las principales formas de expresión artística son la plástico-pictórica y la musical. La expresión plástica puede entenderse como la necesidad de dar rienda suelta, consciente o inconscientemente, a las energías y estados de ánimo que surgen del interior de la persona. Puede pensarse, a su vez, como juego y distracción, a través de dibujar, colorear, pintar, modelar, esculpir. La música es, materialmente, configuración de sonidos y su razón de ser es la producción de belleza. Se puede entender también como un lenguaje, una forma de expresión humana y su educación es hoy uno de los elementos básicos de la formación del ser humano.

Las funciones del área expresiva práctica o no verbal, ubican a la persona en condiciones de moverse en el contexto social al que pertenece, y de actuar de modo productivo en él, en interacción con las demás personas con las que convive en el mismo contexto y con el medio físico.

Para terminar solo queremos hacer dos consideraciones: la primera hace referencia a que el contexto en el que se sitúen los problemas, que por parte de los profesores se tiende a considerar como irrelevante o, al menos como poco significativo, tiene una gran importancia, tanto para determinar el éxito o fracaso en la resolución de los mismos, como para incidir en el futuro de la relación entre las matemáticas y los estudiantes. La segunda, que parece una cuestión trivial, es que la única manera de aprender a resolver problemas es resolviendo problemas; es muy bueno conocer técnicas y procedimientos, pero vistos en acción, no solo a nivel teórico, porque si no, es un conocimiento vacío; luego, hay que hacer cuantos esfuerzos sean precisos para que la resolución de problemas sea el núcleo central de la enseñanza matemática.

Así, la resolución de problemas contribuye grandemente al desarrollo del pensamiento en general, y al desarrollo del pensamiento reflexivo, en particular.

3.2 Estrategia metodológica para el desarrollo del pensamiento reflexivo a través de la Matemática. Fundamentos

El término “estrategia” surge en la esfera de lo militar, ligada a la táctica. Lo anteriormente dicho lo afirma Ramírez (1999) cuando alude a que está asociada al arte de dirigir y coordinar operaciones militares para alcanzar un objetivo. A partir de su surgimiento ha sido utilizada en diferentes ramas y con variabilidad de conceptos. La estrategia ha sido concebida como la forma de dirigir las acciones para alcanzar determinados objetivos.

La determinación de meta y objetivos a largo, mediano y corto plazo y la adaptación de acciones y recursos necesarios para alcanzarlos son elementos claves para llevar a cabo la estrategia.

El propósito de toda estrategia es vencer dificultades. La estrategia permite determinar qué hacer para transformar la situación existente. Toda estrategia requiere de un proceso de planificación que culmina en un plan general, con misiones de orden organizativo, metas, objetivos básicos a desarrollar en determinado plazo, con el empleo de recursos mínimos y los métodos que aseguren el cumplimiento de dichas metas.

De lo anterior se evidencia que las estrategias son siempre conscientes, intencionadas y dirigidas a la solución de problemas de la práctica.

Diversos autores coinciden en señalar que las estrategias son instrumentos de la actividad cognoscitiva que permite al sujeto determinada forma de actuar sobre el mundo, de transformar los objetivos y situaciones.

En los momentos actuales, la estrategia ha alcanzado gran importancia, es por ello que su utilización se incrementa constantemente en la actividad productiva, social, económica; como política de dirección. En el campo educativo ha adquirido gran relevancia, vinculada a la actividad de dirección en diferentes instancias del proceso docente educativo y de dirección metodológica.

Según Sierra (1997, p. 20), la estrategia "…constituye la dirección pedagógica de la transformación de un objeto desde su estado real hasta su estado deseado, presupone un diagnóstico real en el que se evidencie un problema que permite la proyección, aplicación y ejecución de un sistema de acciones intermedias, progresivas, continuadas y coherentes que permitan alcanzar de forma paulatina los objetivos propuestos".

Los nuevos retos y desafíos han hecho posible el empleo creciente de estrategias en la solución de problemas. Se incrementa la diversificación tipológica y su estructura peculiar. Diversos autores han definido el concepto desde distintas posiciones; entre los que se encuentran:

Bernad y Neisser (1981, p. 30) "Procesos cognitivos, estrategias atencionales, estrategia de exploración, estrategia de fragmentación, estrategia de repetición, estrategia de decodificación de información, estrategia de nemotecnización, estrategia de elaboración".

Weinstein y Mayer (1986, p. 56) "Estrategia de organización, estrategia de recuperación de información, estrategia de generación de respuesta, estrategia de apoyo al procesamiento".

Nissbet y Schucksmith (1987, p. 28) "Estrategia cognitiva del aprendizaje o estrategia del procesamiento".

Durante los últimos años ha tenido lugar un reconocimiento importante de dos tipos de estrategias de apoyo: "las sociales" (Pascual, 1990, p. 78) y "las afectivas" (Rubio, 1991, p. 50). También Clavel (1981, p. 20) incluye un tercer tipo: "las metacognitivas, estrategia socio afectiva, estrategia afectiva, estrategias sociales".

Las referidas estrategias juegan un rol importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, especialmente en la Matemática, que por la complejidad de la asignatura el profesor deba constantemente buscar vías para que el alumnado asimile de manera consciente el contenido de la asignatura meta.

En la promoción del aprendizaje significativo en los estudiantes está claro que no es suficiente que el profesor actúe como transmisor de conocimientos o facilitador del aprendizaje, sino que tiene que mediar, orientar, monitorear y guiar la actividad constructiva de sus estudiantes, brindarles las estrategias y tácticas adecuadas y pertinentes a su nivel de competencia. "Si pretendemos que los estudiantes usen la materia gris de manera sofisticada y creativa también, que logren procesar rápidamente la información y estén dispuestos a pensar de verdad y abrir sus mentes, se requiere de la mediación de los profesores y padres de familia, a través de una metodología interactiva que facilite el aprendizaje significativo..." (Pérez-Rosas, 2005, p. 4).

El profesor instruccional se caracteriza por instruir, verbalizar demasiado, brindar excesiva información, transmitir solo conocimientos, centrarse solo en el producto o resultado y descuidar los contenidos procedimentales. No ha tomado conciencia de la necesidad de formarse como estratega en el aprendizaje estratégico y de ser un mediador y promotor de la cultura de aprendizaje en su vida, como profesional de la educación. Es un docente que no desarrolla capacidades, aptitudes y destrezas intelectuales en sus estudiantes; no enseña a pensar y no forma un pensamiento estratégico y sistémico en los aprendices.

El profesor estratégico que promueve el aprendizaje significativo en el aula, es un mediador consciente de que hay que hacer todo sumamente explícito y que debe provocar el conflicto cognitivo, sin instruir, ni verbalizar demasiado. Es un docente que estimula de manera intencional el aprendizaje deductivo a través de procedimientos estratégicos y obtiene en sus estudiantes un conocimiento declarativo, procedimental y condicional. Selecciona y organiza la información y los procedimientos para enseñar y para aprender en función del conocimiento de los estudiantes.

Es consciente de que tiene que cambiar sus esquemas cognitivos, que debe ir en busca de los conocimientos previos y que las tareas deben ser de nivel alto para enseñar a pensar y provocar desafíos en los aprendices. Es consciente que debe dar poca instrucción pero mucha metacognición para el desarrollo de habilidades de pensamiento en los estudiantes. Se siente referente, modelo, ejemplo y utiliza la conducta metacognitiva en su actuación como monitor y director del aprendizaje de los estudiantes. Sustenta dicha actuación en la negociación de significados, y provee de pautas, guías y ejemplos para provocar la reflexión.

El profesor estratégico rescata los conocimientos previos de los estudiantes; enseña a tomar decisiones respecto a modos de aprender y los procedimientos a usar; enseña a reconocer el contexto o las condiciones en que se presentan las tareas. Está preocupado por el proceso de aprendizaje y no meramente por el producto o resultado.

El profesor que aplica la metacognición en el aula, se constituye en el mediador, el puente entre la estructura conceptual de la disciplina y la estructura cognoscitiva del sujeto que aprende. Es el experto que posee un pensamiento estratégico para enseñar a pensar a través de estrategias de aprendizaje y no meras instrucciones. Está convencido de que lo que se tiene que transferir y estimular, para nuevos aprendizajes, son los procesos mentales y que lo medular es que los estudiantes entiendan el proceso de un estudio bien hecho, que los llevará al desarrollo del pensamiento y a un aprendizaje científico.

Como se puede apreciar, a lo largo de la historia se le han otorgado diferentes roles al profesor: facilitador, orientador, consultante. En esta concepción, su rol no se circunscribe a ninguno de estos en tanto ello implicaría asumir una posición reduccionista. De ahí que, el profesor no sea un consultante, aunque consulte; no sea un orientador, aunque oriente; no sea un guía, aunque guíe; no sea un dirigente del proceso, aunque dirija; no sea un facilitador, aunque facilite el aprendizaje; y no es ni consultante, ni orientador, ni guía, ni dirigente, ni facilitador; porque es eso y mucho más, es un educador.

El profesor no debe estar dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, sino formar parte de este ya que potencializa el desarrollo integral de la personalidad de sus estudiantes, por cuanto, en cada asignatura y en cada profesor hay potencialidades para el desarrollo moral, vocacional e integral que ello implica. Además, permite la configuración de unidades subjetivas del desarrollo sobre la base de las relaciones con ellos y con el grupo de asignaturas, que desarrollan de forma general al estudiante.

El profesor estimula la participación individual y activa de sus educandos mediante sus dudas, contradicciones y reflexiones que les permiten llegar a sus propias conclusiones. Por consiguiente, las influencias educativas se vinculan con sus necesidades lo que permite plantear que el profesor es parte del proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, el profesor concibe las tareas docentes, orienta, controla, ofrece ayudas dosificadas, pero cada estudiante trabaja con independencia en la realización de las tareas concebidas y propuestas. Estas últimas deben propiciar la búsqueda, utilización y valoración del conocimiento, en función de un objetivo dado.

En consecuencia con lo anteriormente expresado, se considera como aprendizaje aquel que precede el desarrollo y mantiene con este una relación dialéctica. Por tanto, el profesor enseña en situaciones interactivas, con lo que promueve la zona de desarrollo próximo; fomenta en los estudiantes el desarrollo de una lectura dinámico-participativa. O sea, que no solo se limiten a la ejecución de las actividades que tradicionalmente han realizado, sino que apliquen el ejercicio pleno de sus capacidades intelectuales, al ser capaces de percibir la información que aparece en el texto y transformar su conducta, actuar y comunicarse. En ello se establece una relación lógica entre el objetivo-contenido-método y al ofrecer su ayuda dosificada, permite que los estudiantes actúen como un constructor-transformador en la solución de problemas matemáticos.

Por tanto, el docente debe motivar al estudiante y mantener su constancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Se constituye por un gran número de estímulos psicológicos y educativos que deben estar presentes durante todo el curso académico, período lectivo y turno de clase.

De ahí la necesidad de identificar diferentes factores como promotores de la motivación individual, muchos de ellos provienen de la necesidad de sentir confianza. Esta se deriva mayormente de algún tipo de aprobación o estimulación por parte del profesor.

Por tanto, una variedad de actividades presentadas de forma atractiva garantizaría la motivación. El empleo de un mismo problema puede conducir a un desinterés gradual. De ahí que, un cambio de actividad es tan bueno como un buen descanso. Para evitar el aburrimiento, las clases de Matemática no se deben sustentar en “horarios cerrados” de actividades y estas se deben cambiar y combinar. El profesor, con su maestría, debe hacer que el estudiante se sienta como el protagonista de su aprendizaje. Asimismo, deberá establecer desde el primer momento una comunicación con este y lograr, a través del método empleado, promover vínculos afectivos con el contenido, lo que constituirá su verdadera motivación.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se desarrolla en una dinámica que está dada en la necesidad de resolver un problema, a través de la interacción objetivo–contenido-método.

En correspondencia con los presupuestos adoptados en este libro se asumen las definiciones de objetivo, contenido, método, como se expresa a continuación:

Como objetivo se asume la definición de Álvarez (1999, p. 53) "...son el modelo pedagógico del encargo social, son los propósitos y aspiraciones que durante el proceso docente-educativo se van conformando en el modo de pensar, sentir y actuar de los estudiantes".

Como contenido se asume la definición de Labarrere y Valdivia (2001, p. 87) "...es el volumen de conocimientos provenientes de las distintas ciencias y de la técnica, el componente ideológico, político y cultural, las habilidades, los hábitos y métodos de trabajo que posibilitan la formación multilateral de la personalidad de los estudiantes".

Como método se asume la definición de Álvarez (1999, p. 28) "...es la organización interna del proceso docente-educativo, es la organización de los procesos de la actividad y comunicación que se desarrollan en el proceso docente-educativo para lograr el objetivo".

La dinámica parte de la interacción antes referida con los restantes componentes del proceso. En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, se manifiesta como sigue: el objetivo se refleja en el problema del estudiante, el contenido se expresa en la situación típica de aprendizaje y el método en el propio estudiante, que a partir de su esquema de contenido y su esquema de forma, lo exterioriza en operaciones matemáticas.

El objetivo inicial y el contenido de la situación típica de aprendizaje, determinan qué métodos o estrategias metodológicas debe seguir para lograr el fin; de ahí su carácter participativo.

El objetivo inicial se transforma en la medida que el estudiante hace contacto con la situación típica de aprendizaje y este recibe la influencia del emisor consciente o subconscientemente; de ahí, su carácter dinámico.

Ese carácter participativo se manifiesta cuando el estudiante se transforma de manera paulatina en el protagonista del proceso de construcción de la situación típica de aprendizaje y cuando desarrolla sus propias estrategias metodológicas en el enfrentamiento a situaciones cambiantes, contradictorias que permiten que el estudiante se trace nuevos objetivos.

Es significativo acotar que el componente más dinámico lo constituye el método. En un aula podrán existir tantas variantes de él como estudiantes, dado que la solución de cada situación es la concreción de este; ello permite que cada estudiante se apropie del método, al tiempo que lo particulariza. Este componente es motivante en la medida que se vincula la situación típica de aprendizaje con la vida y se logra convertir en actividad transformadora del estudiante las acciones previstas.

La maestría pedagógica del docente se manifiesta al lograr enfrentar al estudiante a la situación típica de aprendizaje que le exija el ejercicio pleno de sus capacidades y lo motiven de forma continua y ascendente. Cabe señalar que muchas veces el estudiante, motivado por los nexos afectivos con el contenido y su método, logra formar unidades subjetivas del desarrollo y con ello los resultados rebasan el objetivo trazado previamente.

El profesor debe tener conciencia de que el centro del proceso debe ser el estudiante y el grupo en general, de ahí la necesidad de motivarlos. El proceso de enseñanza-aprendizaje debe contar con el máximo de tiempo posible para el trabajo del estudiante, dirigido a resolver situaciones típicas de aprendizaje de manera activa e independiente; donde sus criterios e intereses han de tomarse en consideración, independientemente que en algún momento se contraponga con la exigencia social.

Para la solución de situaciones típicas de aprendizaje se requiere del desarrollo de habilidades. La habilidad, según Santiesteban (2015, p. 36) "…es una formación psicológica individual que gracias a la actividad y a la comunicación en un proceso de socialización, el sujeto cognoscente expresa un conocimiento en la praxis; dicho conocimiento se concreta en un sistema de acciones y operaciones dominadas por el sujeto que le permiten alcanzar un objetivo”.

En trabajos de Rubinstein, Leontiev y Brito (que serán analizados a continuación), dirigidos al desarrollo del pensamiento y su relación con las habilidades manifiestan de forma implícita o explícita que los procesos psíquicos del hombre se desarrollan a partir de tres momentos importantes, que se resumen en:

- La apropiación de los conocimientos.
- La dinámica de su actividad práctica.
- La comunicación verbal.

Así por ejemplo, Rubinstein (1965, p. 358) señaló, “Dos son las formas en que se manifiesta el papel regulador del reflejo de la realidad por parte del individuo, en forma de: regulación inductora y regulación ejecutora”. Mediante la primera de estas formas se puede responder el qué, por qué y para qué, de la actuación del sujeto, o sea, es la que determina lo que se realiza. Pertenecen predominantemente, a esta forma de regulación, todos los fenómenos psíquicos que movilizan, conducen y sostienen la actuación del sujeto, de lo que son expresión: motivaciones, vivencias afectivas y voluntad.

Mediante la regulación ejecutora se puede responder al cómo de la actuación del sujeto, es la que determina que lo que se realiza se cumpla a tenor de las condiciones en que se desarrolla. Pertenecen predominantemente, a esta forma de regulación, todos los fenómenos psíquicos que posibilitan tomar en consideración las condiciones en que transcurre la actuación de sujeto: cognición, hábitos, habilidades, capacidades.

La teoría de Leontiev (1980, p. 81) plantea, que "…la actividad está formada por acciones y estas últimas a su vez por diferentes operaciones en cuyo dominio radica el éxito de la realización de cualquier actividad". Esta concepción deja claro que las unidades estructurales son: la actividad, la acción y la operación. Más adelante (1980, p. 83) define: "Denominamos acción al proceso que se subordina a la representación de aquel resultado que habrá de ser alcanzado, es decir, el proceso subordinado a un objetivo consciente".

El referido autor (1980, p. 83) propone que "Del mismo modo que el concepto de motivo se relaciona con el concepto de actividad, así también el concepto de objetivo se relaciona con el concepto de acción". En relación con el tercer eslabón de su teoría, más adelante (1980, p. 87), planteó: "La acción que realice el sujeto responde a una tarea: el objetivo, dado ante condiciones determinadas. Por eso, la acción presenta una cualidad propia, su componente "generador", peculiar, que es precisamente las formas y métodos por cuyo intermedio esta se realiza. Las formas de realización de la acción yo las denomino operaciones".

El nexo entre Rubinstein y Leontiev, según plantea Brito (1990, p. 4), radica en que “…la actividad humana y su estructura en su determinación reguladora, presenta en unidad las dos formas funcionales de regulación: inductora y ejecutora, de este modo cada unidad estructural: actividad, acción y operación se caracteriza por aspectos de esta doble determinación”.

En esta concepción planteada por Brito, las habilidades se insertan a partir del reconocimiento distintivo de la determinación reguladora ejecutora en su unidad estructural correspondiente: la acción.

Como las habilidades tienen que ver con el dominio de la ejecución del sujeto, esto implica el grado de sistematización de la ejecución, el que trae aparejado que el sujeto llegue a ejecutar con independencia. Un aspecto de extraordinaria importancia con vistas a garantizar el dominio de las habilidades, lo constituye el tener en cuenta los requisitos cualitativos y cuantitativos para su sistematización.

Según Bermúdez, (1996, p. 8) los requisitos cuantitativos: “…pueden definirse según la frecuencia de ejecución, dada por el número de veces que se realiza la acción, y la periodicidad de la ejecución, que consiste en la distribución temporal de la realización de la acción”.

Este mismo autor considera que los requisitos *cualitativos* (1996, p. 8): “…se ponen de manifiesto en la complejidad de la ejecución, dada por el grado de dificultad de los conocimientos y del contexto de actuación con el cual funciona la acción, y la flexibilidad de la ejecución, expresada en el grado de variabilidad de los conocimientos y el contexto de actuación con los cuales funciona la acción”.

En el proceso pedagógico estos requisitos tienen que funcionar como un sistema para lograr una sistematización adecuada; así por ejemplo, sí el número de veces que se repite la acción es adecuado, pero no lo es su distribución temporal, entonces no se logra la efectividad necesaria. Si ocurre lo contrario, puede haber mucha concentración de las acciones en un breve intervalo de tiempo que cause desgaste o fatiga en la persona y tampoco se produzca el resultado deseado. Por tanto, es imprescindible estructurar coherentemente los requisitos cuantitativos a partir del resultado concreto de cada grupo de educandos sin perder de vista las individualidades.

En la misma medida que se armonicen los requisitos cuantitativos deben funcionar los cualitativos, o sea, que es importante aumentar gradualmente la exigencia de las tareas que se les plantea a los discentes, a partir de los principios de ascensión de lo simple a lo complejo y de lo concreto a lo abstracto. Además, que estas exigencias se mantengan cuando operen con una habilidad en campos diversos del conocimiento de la ciencia, de la lengua. Por tanto, en el proceso de enseñanza-aprendizaje debe hacerse énfasis en el carácter universal de las operaciones correspondientes a una habilidad determinada (como forma de organización lógica del pensamiento del hombre) y su aplicación. De ahí que, tenga que ser entrenado para su logro eficiente.

Sobre la base del cumplimiento de estos requisitos se forman conocimientos y habilidades perdurables, lo cual constituye premisa indispensable para la formación integral del discente.

De la forma en que se orienten las acciones depende, en gran medida, el éxito de la actividad. Precisamente, la acción es el eslabón fundamental de la teoría de Galperin, Talízina (1988, p. 58) "…la imagen de la acción y la del medio donde se realiza la acción, se unen en un elemento estructural único sobre cuya base transcurre la dirección de la acción que se llama base orientadora de la acción".

La referida base orientadora es, en esencia, el sistema de condiciones en que se apoya el hombre para cumplir la acción. En tal sentido, el propio Talízina (1988, p. 59) plantea: "…la acción por las funciones que se cumplen puede estar dividida en tres partes:... orientadora, de ejecución y control".

Las operaciones integrantes de una habilidad deben ser solo aquellas necesarias, esenciales e imprescindibles (denominadas "invariantes funcionales" de la ejecución), que de ser sistematizadas, se alcanza el nivel de dominio que permite identificar la formación de la habilidad.

Al concluir una unidad didáctica se debe haber logrado un determinado nivel de desarrollo en la solución de situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática. Es notorio destacar que por la complejidad de las situaciones antes mencionadas en una unidad no se desarrolla completamente determinada habilidad, sino que es necesario retomarla, mediante la aplicación de los requisitos cuantitativos y cualitativos para el desarrollo de habilidades.

La estructura funcional de una habilidad representa, para el estudiante, una estrategia para la construcción consciente de su conocimiento, mientras que para el profesor constituye un recurso para guiar y controlar el proceso de formación y desarrollo de una habilidad. Ello responde a que mediante esta estructura debe diseñar los ejercicios, las situaciones típicas de aprendizaje, de forma tal que ejercite las invariantes funcionales y con ello se alcance el desarrollo de la habilidad.

En la enseñanza de la Matemática, para el desarrollo de habilidades, se requiere de la aplicación de familias de problemas y debe cumplir con el principio de la derivación gradual del contenido. Por tanto, debe comenzar con un problema elemental a partir del cual se estructura de forma lógica y ascendente el resto de los problemas de situaciones típicas de aprendizaje en la enseñanza de la Matemática.

Cada familia nueva de problemas (con sus variantes) debe aportar algún elemento nuevo que enriquezca al objeto y al método de solución, que le de mayor carácter de esencia al objeto, al acercar gradualmente al estudiante al conocimiento más profundo y general del fenómeno estudiado y posibilitar, al mismo tiempo, la integración de los contenidos, toda vez que para su solución necesita de la aplicación de contenidos ya asimilados.

Resulta conveniente destacar que solo con el enfrentamiento a situaciones nuevas, durante las clases prácticas, no se garantizan los niveles de dominio deseados. El dominio de los contenidos requiere de un proceso posterior de ejercitación, a lo largo del cual se hacen más precisas y menos desplegadas las operaciones.

Con la ejercitación de cierto tipo de problema se alcanza un determinado nivel de dominio, que es transferido durante el enfrentamiento a una nueva situación, más compleja que la anterior y, por lo tanto, resulta insuficiente para resolverla. Esta contradicción esencial (entre los conocimientos adquiridos y la incapacidad de llevarlos a la práctica en situaciones complejas) permite el salto cualitativo en las situaciones típicas de aprendizaje en la enseñanza de la Matemática y deviene en fuerza motriz del desarrollo de las capacidades cognoscitivas del estudiante.

El modelo de la estructura funcional solo constituye un punto de partida para la determinación de las operaciones básicas que conforman la habilidad, y la delimitación de los niveles de situaciones típicas de aprendizaje para la enseñanza de la Matemática. Este no constituye un esquema, por cuanto considera la adecuación de las operaciones a las condiciones particulares que ocurren en el objeto. De ahí que la conformación de una familia de problemas, tomando como punto de partida este modelo, le confiere un carácter dinámico a la misma.

Según nuestra concepción, la familia de problemas debe presentar la siguiente estructura organizativa:

1. *Problemas de primer tipo.* Constituyen situaciones particulares muy simples, con un mínimo grado de complejidad y riqueza en el objeto, con las que el estudiante se familiariza aplicando el método de solución con ayuda del profesor.

2. *Problemas de segundo tipo.* Constituyen situaciones conocidas con variantes de un mayor grado de complejidad en el objeto, dado por la introducción de nuevos elementos y condiciones y, ante los cuales el estudiante se ve obligado, no solo a actuar reproductivamente, sino con cierto grado de productividad.

3. *Problemas de tercer tipo.* Constituyen situaciones con el máximo grado de complejidad en el objeto, a través de las cuales se generaliza el método de trabajo empleado y que permiten, una vez realizadas por el estudiante, controlar el grado de dominio y profundidad alcanzado en la habilidad que preside el tema.

Por ello, realizamos las siguientes recomendaciones para una organización más eficiente del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática:

- Reducir el tiempo dedicado a la exposición de contenidos teóricos e incrementar el tiempo dedicado a la ejercitación y actividades prácticas.

- Modificar los actuales métodos de impartición de clases, con los cuales solo se enseñan procedimientos racionales para la resolución de problemas.

- Modificar la concepción actual de algunas formas de docencia que no incentivan la participación activa de los estudiantes.

Cada una de las formas de organización de la docencia, con independencia de sus propósitos, debe convertirse en marco propicio para la reflexión, para el descubrimiento y construcción del conocimiento por parte del estudiante.

En las disciplinas de ciencias es característica de la conferencia la exposición de los contenidos teóricos esenciales según una lógica inductiva-deductiva, con ayuda de la cual se desarrollan los conocimientos en la solución de situaciones típicas de aprendizaje para la enseñanza de la Matemática, a la vez que se desarrollan las habilidades del estudiante. Estos contenidos deben ser planteados en forma de situaciones problémicas a través de vías tales como preguntas, demostraciones de hechos experimentales, planteamientos de hipótesis o la formulación de conclusiones para su verificación experimental.

Ello, además de aumentar la influencia educativo-instructiva intensifica el interés hacia lo desconocido, lo cual constituye una premisa para el desarrollo de discusiones heurísticas del material docente, en las que el profesor debe conducir con maestría las reflexiones de los estudiantes.

La segunda etapa del proceso de enseñanza-aprendizaje debe ser la clase de ejercitación, que tiene como propósito que el profesor ilustre y explique, por medio de ejemplos los métodos generales de solución de problemas, revele de forma desplegada las habilidades productivas a lograr en el tema, con lo cual se prepara a los estudiantes para resolver múltiples problemas particulares a través de los diferentes ejercicios que realiza. En esta clase, el estudiante comienza a reproducir el método de solución hasta gradualmente producir y crear, por lo que sugerimos que se realice en forma problémica, siempre que el contenido lo permita; sugerimos para ello comenzar por el enfrentamiento del estudiante a problemas sencillos hasta más complejos y diversos.

Con esta concepción, la primera clase de ejercicios posibilita el inicio de la construcción, por parte de los estudiantes, del método de solución de problemas. Este proceso continúa en las siguientes clases prácticas a través de las cuales estos generalizan el método de trabajo, lo aplican de forma cada vez más consciente e independiente y con ello, se logra el desarrollo de la habilidad in situ.

Al culminar la clase, el profesor orientará la realización de otros ejercicios en correspondencia con el problema tipo desarrollado en esta, con el propósito de que el estudiante se entrene y llegue a dominar, a ese nivel, el método de solución.

Una vez resueltos los problemas se pasará a la fase de discusión abierta de las soluciones, por parte de los estudiantes. La función del profesor en esta etapa, es la de guiar la discusión por medio de preguntas hacia aquellos aspectos más polémicos, de manera que revele siempre la esencia del fenómeno objeto de estudio, sus regularidades, casos límites, sus nexos con otros hechos y fenómenos, además de discutir aquellos elementos del método que constituyen premisas para la solución de problemas, lo cual permitirá generalizar el método de solución.

Culminada la clase práctica han de orientarse, nuevamente, problemas correspondientes a la etapa de ejercitación que posibiliten el entrenamiento de los estudiantes.

Al finalizar el tema se puede proponer la realización de un seminario que permita la integración de todos los contenidos abordados, a través de la discusión de problemas semejantes a los del tercer tipo. Este seminario permitirá al profesor controlar el nivel de desarrollo de la habilidad objeto de estudio.

Con seguridad serán detectados estudiantes que, una vez culminado el tema, no han alcanzado el nivel de asimilación previsto; con estos el profesor puede elaborar un plan consistente en la asignación de una tarea extraclase, para la que deberá seleccionar adecuadamente los ejercicios, a partir de su carácter sistémico y las dificultades detectadas.

En síntesis, la utilización de la estructura funcional de una habilidad como metodología para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, permite a los docentes diseñar la dinámica del aprendizaje de forma motivante, de manera que el estudiante participe activamente en la construcción de sus propios conocimientos.

La estructura funcional de una habilidad representa para dicho estudiante una estrategia para la construcción consciente de su conocimiento, mientras que para el profesor constituye un recurso para guiar y controlar el proceso de formación y desarrollo de una habilidad.

El modelo estructural-funcional constituye un punto de partida para la determinación de las operaciones básicas que conforman la habilidad y la delimitación de los niveles de situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática. Por lo tanto, no se convierte en un esquema, por cuanto considera la adecuación de las operaciones a las condiciones particulares que ocurren en el objeto.

3.2.1 Estrategia metodológica para el desarrollo del pensamiento reflexivo a través de la Matemática

La base de promover una enseñanza capaz de dotar a los estudiantes de la posibilidad de aprender a aprender es la de incorporar al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática los métodos, de manera armónica y racional, que promuevan la actividad independiente, reflexiva y creadora de los educandos.

Una de las formas más efectivas de desarrollar el pensamiento reflexivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de dicha asignatura es mediante la utilización de los métodos problémicos, basados en la búsqueda de explicaciones de los ¿por qué? y los ¿cómo?, de los fenómenos que se producen en su entorno. Se pueden complementar obviamente, la resolución de ejercicios, problemas, desafíos, juegos.

De acuerdo con Lagos y Revelo (1999, p. 43):

> La enseñanza problémica analiza enfoques pedagógicos, pero todos ellos enmarcados dentro de un eje central que es la pregunta o la forma como el docente indaga o cuestiona a sus estudiantes con el objeto de verificar el proceso de enseñanza. Los contenidos temáticos de las asignaturas que componen las ciencias básicas, colocan a disposición de los docentes, múltiples ejemplos de hechos contradictorios, propios para la creación de situaciones problémicas y propicios para desarrollar un pensamiento creador, inquisitivo e independiente.

Según Delors (1996, p. 24):

> …al aplicar el aprendizaje basado en problemas, las actividades giran en torno a la investigación y discusión de la situación problemática, de este modo, el aprendizaje ocurre como resultado de la experiencia de trabajo en los problemas y la formación se favorece, toda vez que es posible reflexionar sobre el modo como se enfrentan los problemas, se proponen las soluciones y sobre las actividades y aptitudes en torno al enfoque pedagógico que presupone un constante auto-aprendizaje y auto- formación.

El aprendizaje basado en problemas es considerado como una estrategia, un enfoque que permite que los estudiantes y los docentes expongan sus personalidades y fomenten la autonomía de juicio, la capacidad de almacenar y procesar información y relacionar situaciones problema o estados de inquietud intelectuales, conceptual y motivacional; la responsabilidad personal y social dentro de un ambiente de competencia y respeto por las diferencias en el proceso de aprender a aprender.

Las habilidades matemáticas en el análisis y resolución de situaciones problemáticas necesitan del uso de estrategias para el análisis y la comprensión del texto, lo que resulta motivador si parten de una situación matemática o de la vida práctica para el sujeto que aprende. Es importante desarrollar algunas habilidades de pensamiento lógico; en cuanto a la resolución de problemas ya que los estudiantes tienen que razonar y reflexionar sobre cuáles son los métodos y procedimientos que se utilizarán en su resolución.

Al tomar en cuenta los puntos de vista del aprendizaje basado en problemas, así como el modelo sistémico-estructural-funcional para el desarrollo de habilidades, a través de la resolución de problemas se llegaron a establecer situaciones típicas de aprendizaje para la enseñanza de la Matemática que constituyen acciones metodológicas de la estrategia para desarrollar el pensamiento reflexivo en los estudiantes. La misma está compuesta por diez acciones que son:

I. Desarrollar un proceso centrado en el aprendizaje.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática tradicionalmente se ha enfatizado en el papel del docente y se ha sobrevalorado, a veces, su capacidad para hacer entender el contenido de la asignatura. O sea, se considera más importante la enseñanza que el aprendizaje. Esta acción indica que se debe otorgar mayor relevancia al aprendizaje, por lo que los docentes deben prestar atención a la manera en que cada estudiante aprende y hacerles reflexionar acerca de sus potencialidades y limitaciones al enfrentarse a los contenidos matemáticos.

Lamentablemente, todavía, es muy común que se expongan ante el estudiante los *productos* y *resultados* de la resolución de problemas, pero no el proceso mismo. Si examinamos un libro básico con problemas resueltos de matemática, encontraremos por lo general soluciones tersas y acabadas. Rara vez el autor incluye comentarios sobre los intentos fallidos de solución, los casos particulares examinados antes de llegar a la solución general o los refinamientos realizados a una primera solución no totalmente satisfactoria.

Estos y otros elementos del proceso son cuidadosamente eliminados y lo que se nos presenta es el producto final, conciso y elegante. Pero la consecuencia es que el estudiante obtiene una visión falseada de lo que es resolver problemas y de la actividad matemática en general.

Nuestro objetivo principal en esta acción es dejar que el profesor centre su planificación en actividades que el estudiante tenga mayor tiempo para lograr el desarrollo de las habilidades preestablecidas por el subsistema educacional, o sea, adiestrar al alumnado en el desarrollo de aquellas habilidades que le permitan resolver múltiples problemas particulares. Es bueno dejar claro, desde el principio, que el desarrollo de una habilidad es el resultado del trabajo colectivo y personal, de la práctica adquirida al resolver problemas y de la reflexión sobre esa práctica. De ahí recomendamos:

- Reducir el tiempo de exposición de contenidos teóricos e incrementar el dedicado a actividades prácticas.

- Modificar los métodos de impartición de clases con los cuales solo se enseñan procedimientos racionales para la resolución de problemas.

- Llevar al estudiante la forma de pasar, mediante la abstracción, de un problema de la vida, a un modelo teórico que permita su resolución en el marco de la asignatura.

- Transformar la concepción de algunas formas de docencia que no incentivan la participación activa de los estudiantes.

Por tanto, el profesor debe crear un clima en la sala del aula a través de preguntas, situaciones problémicas, en el que se pueda discutir, reflexionar, argumentar, valorar, las situaciones de aprendizaje.

El diálogo se encuentra entre las acciones comunicativas más importantes en el aula. La construcción del conocimiento a través del diálogo no niega la presencia de momentos eminentemente expositivos por parte del profesor.

El proceso de enseñanza-aprendizaje debe caracterizarse por un máximo de tiempo de trabajo activo e independiente del estudiante, en el que dedique a las actividades inductivas el menor tiempo posible.

II. Desplazar al estudiante del papel de objeto al de sujeto del proceso.

Esta acción demanda que el docente le otorgue un rol activo al estudiante, que no lo considere un simple receptor de información, sino que dirija su acción a crear las situaciones en que él sea capaz de gestionar su propio aprendizaje. En la asignatura Matemática esto se puede lograr a partir de la utilización de métodos problémicos. La resolución de problemas, por sus características, siempre debe presentar al estudiante situaciones que le estimulen a buscarles solución, con ello puede desarrollar de manera paulatina sus habilidades al tiempo que enfrenta barreras de dificultad creciente, pero con la condición de que siempre este en condiciones de resolverlas. *Situar al estudiante en el centro del proceso, le posibilita desarrollar estrategias de aprendizaje y estimular el pensamiento reflexivo.*

I*II. Convertir el objetivo del docente en aspiración del estudiante.*

Por lo general, los docentes de Matemática tienen un alto grado de identificación con la ciencia matemática, pero no siempre es así con la asignatura. Se necesita que esten convencidos de la importancia de la asignatura para las futuras profesiones y la vida cotidiana. Por ello, no basta con que se tracen objetivos cognoscitivos adecuados, sino que debe ser capaz de hacer que los estudiantes los reconozcan y se identifiquen con ellos. Solo así puede lograrse que tomen parte activa en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Esta actividad es generadora de la capacidad de reflexionar acerca de su propio aprendizaje.

IV. Establecer un nexo afectivo docente–discente para favorecer el nexo discente–contenido.

La Matemática es una asignatura que tradicionalmente presenta dificultades para los estudiantes. Muchas veces, es considerada la causa de su deserción masiva y de los bajos rendimientos académicos. El miedo al fracaso es un temor que suele marcar las actitudes de los estudiantes en los diferentes niveles de enseñanza en que está involucrada la Matemática.

Según esta acción, el docente no debe alzar la barrera de la incomunicación con expresiones o posiciones que incrementen el miedo a la asignatura. Por el contrario, debe establecer un clima afectivo favorable en la sala de clases, que le permita lograr en el estudiante una actitud positiva frente a la Matemática. Lograr un buen nivel de identificación con el contenido matemático es favorecer el aprendizaje y pensamiento reflexivos por parte de este.

V. Motivar como guía para un aprendizaje significativo.

Vincular las situaciones matemáticas que se le presentan a los estudiantes con aquellos elementos que les son familiares, que están presentes en su vida cotidiana, resulta clave para lograr aprendizajes sólidos y duraderos. El docente de Matemática no debe descuidar que los símbolos, ecuaciones, figuras geométricas, son una representación simplificada de objetos y fenómenos de la realidad, por eso siempre debe llevar a los estudiantes la manera de pasar del lenguaje natural al lenguaje matemático. Esto resulta motivante, genera aprendizajes significativos y, a la vez, potencia el pensamiento reflexivo.

VI. Presentar situaciones que estimulen al estudiante.

La motivación resulta un elemento clave en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Las situaciones pueden venir a partir del profesor, del manual, de una página web en internet o de otro medio, pero para el estudiante debe ser colocado de forma novedosa, que cree en él una necesidad de ser resueltas para así acercarse al cumplimiento del objetivo de la actividad. La presentación de familias de problemas, en que cada uno sirve de base para la solución del siguiente, al tiempo que presenta algún elemento nuevo, es una alternativa satisfactoria para guiar el aprendizaje de la Matemática por los estudiantes, de manera que se mantengan estimulados en la búsqueda del conocimiento.

VII. Responder a la diversidad del alumnado.

El nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes de un mismo grupo es diferente, por ello, el docente de Matemática no debe descuidar la atención a las diferencias individuales de sus estudiantes. Las familias de problemas, permiten esta atención diferenciada, ya que pueden asignarse secuencias diferentes a cada estudiante, en dependencia de su desarrollo intelectual.

VIII. Asignar trabajo independiente al estudiante.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática requiere más tiempo que el de otras asignaturas, por ello el docente no debe restringir su acción al aula. Puede y debe utilizar también parte del tiempo en que el estudiante está fuera de la institución educativa, al asignar el trabajo independiente, que podrá realizar de manera individual o en grupo. El trabajo colaborativo en el grupo puede generar espacios de reflexión entre estudiantes de diferentes niveles con lo cual se pueden ayudar mutuamente.

La guía de trabajo independiente del encuentro. Su modelación, orientación y control.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática demanda al profesor un trabajo metodológico de altas exigencias, por cuanto en poco tiempo tiene que ser capaz de precisarle a los estudiantes los aspectos esenciales de un tema y acercarlos a las fuentes de información. Pero la garantía de que todos tengan las mismas orientaciones es la modelación, entrega y orientación de la guía de estudio independiente.

En la experiencia acumulada en la educación con la utilización del encuentro, se presentan dos variantes de modelar una guía de estudio:

- Por temas.

- Por encuentros que se van a impartir.

En cualquiera de las dos variantes la guía tiene que cumplir determinadas exigencias:

- Introducción:

- Situar la asignatura en el plan de estudio de la carrera. Sus objetivos.

- Explicar brevemente su contenido e importancia.

- Seleccionar los medios didácticos para el desarrollo de la asignatura.

- Explicar la metodología para efectuar el estudio independiente.

- Determinar la forma de evaluación, en lo que se precisen los criterios e indicadores que se utilizarán además para la autoevaluación.

- Otros elementos de interés para los estudiantes.

- Desarrollo.

- Tema.

- Sumario de contenido.

- Objetivos a cumplir.

- Acciones a ejecutar durante el estudio independiente.

- Actividades o ejercicios a realizar.

- Orientaciones y explicaciones para el estudio.

- Literatura a consultar.

Se considera que una guía de estudio con calidad es aquella que garantiza un buen por ciento de la preparación efectiva de los estudiantes. De ahí que durante la fase de orientación el profesor dedique un tiempo suficiente a que se comprendan las orientaciones que allí aparecen y que se precisen los aspectos esenciales del contenido a aprender.

La relación que se establece entre la correcta planificación de la guía de estudio, su orientación en la clase, la consulta entre clases y el control flexible del aprendizaje de los estudiantes, revela una dialéctica del proceso de dirección de este en el que la planificación, la orientación y el control se complementan entre sí para lograr que los estudiantes arriben con la calidad necesaria a las metas planteadas.

IX. Graduar en orden creciente la complejidad de las tareas planteadas.

Esta acción es de importancia vital, no atender al principio de lo más simple a lo más complejo, puede malograr el proceso de enseñanza-aprendizaje. El docente de Matemática debe seleccionar muy bien cuáles serán las situaciones a plantear y, sobre todo, en qué orden serán presentadas. De esto dependerá que las situaciones se encuentren dentro de la zona de desarrollo próximo de los estudiantes.

X. Controlar continuamente la marcha de los aprendizajes.

El docente de Matemática no deberá esperar al momento de una evaluación, para conocer el nivel de dominio de los contenidos por parte de los estudiantes. En todo momento debe tener un reflejo de cómo marcha cada uno de ellos, para poder ayudarles a superar las dificultades que pudieran presentar. En dependencia del estado de cada cual, podrá trazar nuevas estrategias, o plantear otras tareas para lograr el cumplimiento de los objetivos instructivos y educativos.

En la resolución de problemas siempre hay producción de varias hipótesis, conjeturas, opiniones, y una tendencia de algunos de los estudiantes a monopolizar la discusión. Cabe al profesor orientar y controlar todo proceso, con atención a las particularidades individuales, los niveles de ayuda.

La resolución de problemas es de los contenidos que más el estudiante debate dentro y fuera de la escuela. Para continuar con el desarrollo de esa habilidad, el profesor debe orientar problemas con diferentes niveles de complejidad que el estudiante debe contar con la ayuda de sus parientes, colegas de clase, amigos. Todo trabajo independiente debe ser orientado ante un objetivo, controlado y evaluado.

Las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática es la columna vertebral de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje, en tanto posibilita estructurar situaciones didácticas, mediante la integración de los viejos y los nuevos contenidos, sobre la base del continuo ascenso de la profundidad del objeto y de la asimilación del sujeto.

Referencias

Acosta (1995). Communicative Language Teaching. Belo Horizonte.

Alsina, C. y otros (1996). Enseñar matemáticas. Madrid: Grao.

Álvarez (1999). La escuela en la vida. Didáctica. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Ballester, S. y otros (2002). El transcurso de las líneas directrices en los programas de Matemática y la planificación de la enseñanza. Ciudad de La Habana: Pueblo y Educación.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. Educational Studies of Mathematics, 17, pp. 125-141.

Brito (1990). Capacidades, habilidades y hábitos. Una alternativa teórica, metodológica y práctica. (ponencia presentada en el primer coloquio sobre inteligencia) ISP “Enrique José Varona”. La Habana, Junio, 1990.

Callejo, M. (1994). Un club matemático para la diversidad. Narcea.

Campistrous Pérez, L. y Rizo Cabrera, C. (2002). La calculadora y el desarrollo del pensamiento. En: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, v. 15, tomo 2, pp. 914-922. Argentina.

Campistrous Pérez, L. y Rizo Cabrera, C. (1996). Aprender a resolver problemas aritméticos. La Habana: Pueblo y Educación.

Campistrous (1993). La calculadora y el desarrollo del pensamiento. En: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. V. 15, Tomo 2. Argentina. p. 914-922.

Corberán, R. y otros (1994). Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en la enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. Madrid: CIDE.

Guzmán, M. (1991). Para pensar mejor. Ed. Labor.

Guzmán, M. (2001). La enseñanza de las ciencias y la Matemática. Recuperado de http://www,oei.org.co/oeiviii/edumat.htm

Delors, J. (1996). La educación encierra un tesoro. Informe de la UNESCO de la comisión internacional sobre la educación para el siglo XXI. Barcelona: Grupo Santilla, UNESCO, pp. 95-108

Dossey, J. y otros (1988). The mathematics report card: are we measuring up? Trends and achievement based on the 1986 National Assessment. Princeton, NJ: Educational Testing Service.

Estrada, M. y otros (2002). La enseñanza de la geometría asistida por computadoras en la secundaria básica cubana. En: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, v. 15, tomo 2, pp. 763-769. Argentina.

Fernández Reyes, M. (1982). Resolución de problemas en la EGB. Informe del Seminario dirigido por el profesor C. Gaulin de la Universidad Laval de Canada, 4, pp. 73-77.

Galperin y otros (1989) Galperin, I.R. Stylistics. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Galvis, Á. (1978). Ingeniería de Software Educativo. Universidad de Santa Fé. Bogotá. Colombia.

García Cruz, J. A. (2000). La Didáctica de las Matemáticas: una visión general. En: http://nti.educa.rcanaria.es/rtee/rtee.htm.

García, R. (1997). La Epistemología Genética y la Ciencia Contemporánea. Homenaje a Jean Piaget en su centenario. Barcelona: Gedisa.

García (1981). La Didáctica de las Matemáticas: una visión general. Recuperado de: http://nti.educa.rcanaria.es/rtee/rtee.htm.

Gómez, P. (1997). Tecnología y Educación Matemática. Informática Educativa, 10, 1 UNIANDESEIDIE.

González (1999) (1995). Comunicación, personalidad y desarrollo. Pueblo y Educación, La Habana.

Hitt, F. A. (1991). Las Microcomputadoras en la Educación Matemática. Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. La Habana.

Jungk (1989). Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Pueblo y Educación, La Habana.

Krulik. S y Rudnik, J. (1980). Problem Solving, a handbook for teachers. Allyn & Bacon Inc.

Astiz, M. y otros (2002). Las nuevas tecnologías:¿son incorporadas en la enseñanza de de la Matemática? En: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, v. 15, tomo 2, pp. 770-775. Argentina.

Labarrere y Valdivia (2001) Pedagogía. Pueblo y Educación, La Habana.

Leontiev (1980). Actividad Conciencia y Personalidad. Pueblo y Educación, La Habana.

López (1982). Cómo enseñar a determinar lo esencial. Pueblo y Educación, La Habana.

Mason, J. y otros (1988). Pensar matemáticamente. M.E.C.- Labor. [Versión en español de la obra Thinking Mathematically, publicada por Addison-Wesley originariamente en 1982 y revisada en 1985].

Muller (1987). Aspectos metodológicos acerca del trabajo con ejercicios en la Enseñanza de la Matemática. Sugerencias para los grupos de investigación. (Material inédito).

Petrovski (1985) Pedagogía. Pueblo y Educación, La Habana.

Polya, G. (1962). Mathematical Discovery (2 vol). John Wiley & Sons, New York.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Mexico: Trillas. [Versión en español de la obra How to solve it publicada por Princeton University Prees en1945]

Polya, G. (1966). Matemáticas y Razonamiento Plausible. Tecnos, Madrid. [Versión en español de Mathematics and Plausible Reasoning publicada por Princeton University Press en 1954].

Puig, L. (1996). Elementos de resolución de problemas. Granada: Comares, Colección Mathema.

Rodríguez, E. C. y otros (2002). Aplicación de la informática en un curso de matemáticas. En: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, v. 15, tomo 2., pp. 809-814. Argentina.

Rosental (1981). Diccionario Filosófico, Editora Política, La Habana.

Rubinstein (1965). El ser y la conciencia. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 1965.

Santiesteban (2015). Metodologia da Investigação Científica. Escolar Editora. Portugal.

Santiesteban y Velázquez (2011). Concepción dialéctico-materialista de las antinomias en la investigación científica. Contribuciones a las Ciencias Sociales, Vol. 3 No. 25. Marzo, 2011. Recuperado de www.eumed.net/rev/cccss/11/snva.htm

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1987). Cognitive Science and Mathematics Education. New York: Lawrence Erlbaum Associated.

Stigler, J. W. y Hiebert, J. (1997). Understanding and improving classroom mathematics instruction: An overview of the TIMSS video study. Phi Delta Kappan, 79(1), pp. 14-21.

Talízina, N. (1988). Psicología de la enseñanza. Moscú: Progreso.

Vaquero, A. y Fernández de Chamizo, C. (1987). La Informática Aplicada a la Enseñanza. Madrid: Eudema S. A.